Областная олимпиада юных математиков, 10 класс, 2013 г.

I тур

1. Решите уравнение

$$x^{2013} - x^{2014} = \left\{ \frac{2015 + x}{1 + [x]} \right\}$$

(здесь $[a]$ – целая часть числа a, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a; $\{a\} = a - [a]$ – дробная часть числа a).

2. Натуральное число a имеет ровно 6 различных натуральных делителей (включая 1 и само число a). Аналогично, натуральное число b имеет ровно 9 различных натуральных делителей, а натуральное число c имеет ровно 14 различных натуральных делителей. Известно, что НОД$(a; b; c) = 10$. Найдите все возможные значения произведения НОД$(a; b) \cdot$ НОД$(b; c) \cdot$ НОД$(c; a)$.

3. Известно, что положительные действительные числа x, y и z удовлетворяют неравенству $3x + 4y + 6z \leqslant 12$. Докажите, что $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant 3$.

4. Пусть AK, BL и CM – высоты остроугольного треугольника ABC. Известно, что $LM = 5$ см, $MK = 12$ см, $KL = 13$ см. Вычислите площадь треугольника ABC.

5. По кругу записали 672 натуральных числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{672} таких, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{672} = 2013$ и $a_k \neq 1342$ для всех k, $1 \leqslant k \leqslant 672$. Докажите, что всегда можно выбрать несколько записанных подряд чисел, сумма которых равна 1342.

II тур

1. Докажите, что число $11^{101} + 11^{102} + \ldots + 11^{199}$ делится на 133.

2. Рассмотрим фигуру, образованную всеми клетками главной диагонали квадрата 20×20 и всеми клетками, лежащими выше этой диагонали. Сколькими способами эту фигуру можно разбить на клетчатые прямоугольники с попарно различными площадями?

3. В квадрате $ABCD$ на стороне CD отмечена точка P. В треугольнике ABP проведены высоты AQ и BR. Пусть S – точка пересечения прямых CQ и DR. Докажите, что $\angle ASB = 90^\circ$.

4. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие равенству

$$f(x + y) = f(x - y) + f(f(1 - xy))$$

при всех действительных x и y.