Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2017 г.

I тур

1. Знайдіть найбільший спільний дільник набору з 2017 таких чисел:

$$2017+1, 2017^2+1, 2017^3+1, \dots, 2017^{2017}+1.$$

2. У чемпіонаті з гандболу взяли участь 8 команд. За перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Команди, що на даний момент або наприкінці турніру набрали однакову кількість очок, розподіляються по місцях по додаткових показниках (особиста зустріч, різниця м'ячів тощо). В деякий момент після чергового туру виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок. Чи зможе наприкінці чемпіонату посісти перше місце команда, що у той момент була на 8-му місці?

3. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} \left(x^2+1\right)y = z^2+1, \\ \left(y^2+1\right)z = x^2+1, \\ \left(z^2+1\right)x = y^2+1. \end{cases}$

4. Є набір з десяти карток, на яких записано по одній цифрі 0, 1, 2,…, 9. Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій) вибирають по одній картці та складають їх послідовно зліва направо так, що у кожного утворюється пятицифрове число (картку з цифрою 0 на своєму першому кроці жоден з гравців вибирати не може). Андрій перемагає у цій грі, якщо число, яке утворилося у нього, ділиться націло на 6. Інакше перемагає Олеся. Кожен з гравців прагне перемогти. Хто за таких умов може забезпечити собі перемогу?

5. У трикутнику ABC відмічено центр вписаного кола I та центр I_A зовні вписаного кола, що дотикається сторони BC. Нехай точка M – середина сторони BC, а точка N – середина дуги BAC описаного кола $\triangle ABC$. Точка T симетрична точці N відносно точки A. Доведіть, що точки I_A, M, I, T лежать на одному колі.

II тур

1. Найдите все целые a, при которых уравнение

$$x^2+(2017+a)x+2016a+4033=0$$

имеет целые решения.

2. Дана полуокружность с диаметром AB и центром O. Точка T выбрана внутри полуокружности. Прямые OT и AT пересекают полуокружность в точках P и Q соответственно. Прямая BQ пересекает касательную к полуокружности, проведенную в точке P, в точке R. Докажите, что $RT \perp BP$.

3. Есть несколько военных баз, некоторые из которых соединены авиасообщением, причём можно единственным образом от любой базы долететь до любой другой (возможно, с промежуточными посадками). На некоторых базах расположены командные пункты. Известно, что любая база (с командным пунктом или без), находящаяся на пути от одного командного пункта к другому, поддерживает связь хотя бы с одним из них. Докажите, что можно выбрать две базы, соединенные прямым авиасообщением, которые в совокупности поддерживают связь со всеми командными пунктами. База, на которой находится командный пункт, поддерживает связь с этим командным пунктом.

4. Найдите все натуральные числа m и n, удовлетворяющие условию

$$(m-n)^{mn} = m^n \cdot n^m.$$