Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2016 г.

I тур

1. Сколько существует трехзначных чисел с ненулевыми цифрами, которые имеют такое свойство – как цифры этого числа не переставлять получится трехзначное число, делящееся нацело на 4?

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + xy + xz = y, \\ y^2 + yz + xy = z, \\ z^2 + xz + yz = x. \end{cases}$

3. Найдите все натуральные n, для которых число $11^n - 1$ делится нацело на $10^n - 1$.

4. В каждой клетке фигуры вида "большой крест" (рис. 1, в средней строке 2017 клеток) стоит число "+1". За один шаг можно поменять знак на противоположный во всех клетках фигуры "крест" (рис. 2), которая полностью расположена внутри большого креста. Можно ли за конечное число получить большой крест, полностью заполненный числами "-1"?

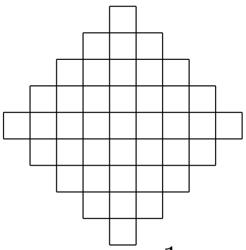

рис. 1

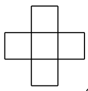

рис. 2

5. На сторонах BC и AB треугольника ABC выбраны точки A_1 и C_1 соответственно так, что отрезки AA_1 и CC_1 равны и перпендикулярны. Докажите, что если $\angle ABC = 45°$, то $AC = AA_1$.

II тур

1. Известно, что один из корней квадратного трехчлена $5x^2 + ax + 8$ составляет 10% от другого. Чему может быть равно число a?

2. Точки M и N – середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$. Известно, что $AB = BC$, а прямая BM является биссектрисой угла ABC. Чему равно отношение $BD : MN$?

3. На клетчатой плоскости нарисован квадрат 2015×2015. Все 2016^2 вершин единичных квадратиков разбиты на пары, причём вершины в каждой паре соединены отрезком длины 1, покрашенным в красный цвет. Докажите, что можно провести прямую, не проходящую по линиям сетки, которая пересекает не менее 1008 единичных красных отрезков во внутренних точках.

4. Найдите все натуральные числа n и простые числа p, удовлетворяющие равенству $p(p-1) = 2(n^3+1)$.