Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2015 г.

I тур

1. Трое велосипедистов стартуют одновременно и едут по сторонам треугольника ABC в таком порядке: $AB \to BC \to CA$. Известны их скорости на каждом из отрезков AB, BC, CA: у первого велосипедиста они равны соответственно 12, 10 и 20 км/ч, у второго – 15, 15 и 10 км/ч, у третьего – 10, 20 и 12 км/ч. Каким может быть значение угла ABC, если известно, что они прибыли в точку A одновременно?

2. В январе Петя ежедневно покупал себе от одной до трех машинок. Первого февраля он попробовал все купленные машинки расставить в прямоугольник. Когда он расставил их в ряды по 7 машинок в каждом ряду, то оказалась 1 лишняя машинка. Когда расставил в ряды по 10 машинок, то лишними остались 2 машинки. Сможет ли Петя расставить их в ряды по 4 машинки?

3. Известно, что в данную прямоугольную трапецию можно вписать квадрат так, чтобы каждая его вершина лежала на соответствующей стороне трапеции (ни одна из вершин квадрата не совпадает с вершиной трапеции). Постройте этот вписанный квадрат с помощью циркуля и линейки.

4. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство:

$$\left(\frac{a+b}{2c}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2d}\right)^2 + \left(\frac{c+d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{d+a}{2b}\right)^2 \geqslant 4.$$

5. Квадрат 11×11 разбит на 121 квадратик 1×1, четыре из которых покрашены в черный цвет, а остальные – в белый. Из квадрата 11×11 вырезают полностью белый прямоугольник (или квадрат). Какую наибольшую площадь может гарантированно иметь этот прямоугольник? Вырезать разрешается только вдоль линий, разделяющих квадрат на единичные квадратики.

II тур

1. Пусть x, y, z – такие отличные от нуля действительные числа, что выполняются равенства

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}.$$

Найдите все возможные значения выражения $\dfrac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz}$.

2. Докажите, что ни при каком натуральном n число $2(n^2+1)-n$ не является точным квадратом.

3. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и CD равны. Окружность ω с центром C касается отрезка BD. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABD. Докажите, что прямая, проходящая через I и параллельная AB, касается ω.

4. В Тридевятом царстве n городов, связанных двусторонними авиалиниями. Расстоянием между двумя городами назовем наименьшее число перелетов, за которое можно попасть из одного города в другой. Диспетчер знает, что из любого города выходит не менее r авиалиний, из любого города можно добраться в любой другой (возможно, с пересадками) и наибольшее из расстояний между городами равно d. Помогите диспетчеру доказать, что $d \cdot r < 3n$.