Областная олимпиада юных математиков, 8 класс, 2017 г.

I тур

1. По колу розставлені 8 кружечків. Чи можна записати у цих кружечках числа 1, 2,…, 8 таким чином, щоб сума чисел, що записані у будь-яких двох сусідніх кружечках, не ділилася ні на 3, ні на 5, ні на 7?

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше могло виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:
а) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває?
б) це був чемпіонат з гандболу, де за перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується?

3. Добуток трьох чисел $\overline{abc} \cdot \overline{ab} \cdot a = 3****7$ є шестицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 7. Цифри a, b, c не обов'язково різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

4. На сторонах BC та CD квадрату $ABCD$ вибрані точки M та N відповідно таким чином, що $\angle MAN = 45°$. На відрізку MN, як на діаметрі, побудували коло ω, яке перетинає відрізки AM та AN у точках P та Q відповідно. Доведіть, що точки B, P та Q лежать на одній прямій.

5. Знайдіть значення $a + b$, якщо дійсні числа a, b задовольняють умови:

$$a^3 + 12a^2 + 49a + 69 = 0 \text{ та } b^3 - 9b^2 + 28b - 31 = 0.$$

II тур

1. Пончик и Сиропчик за один день выпили вместе 39 бутылочек лимонада. Они посчитали, что если от количества бутылочек, выпитых Сиропчиком, отнять 3, то результат будет более чем вчетверо превосходить число бутылочек, выпитых Пончиком. Если число бутылочек, выпитых Сиропчиком, умножить на три и вычесть из результата 85, то получится не больше, чем удвоенное число бутылочек, выпитых Пончиком. Сколько бутылочек лимонада выпил Сиропчик?

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\angle BAD = 70°$, $\angle ABC = 45°$, $\angle BCD = 125°$. Докажите, что выполнено неравенство $BC + CD > AB$.

3. Найдите все натуральные n, для которых число $2^{2n-1} - 2^n + 1$ является точным квадратом.

4. В одной очень далёкой галактике имеется 10 планет. Между некоторыми планетами осуществляются двусторонние межпланетные рейсы. Известно, что если выбрать любые девять планет, то можно облететь их все по одному разу, вернувшись в конце на начальную планету. Какое минимальное количество межпланетных рейсов может быть в этой галактике?