

## Областная олимпиада юных математиков, 8 класс, 2016 г.

### I тур

1. Сколько существует трехзначных чисел с ненулевыми цифрами, которые имеют такое свойство – как цифры этого числа не переставлять получится трехзначное число, делящееся нацело на 4?
2. Найдите по крайней мере одну пару натуральных чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющие равенству:  $\frac{1}{2}(x^2 - y^3) = 2016$ .
3. Андрей, Богдан и Олеся шли одной дорогой из дома в школу, до которой от дома целое число километров. Андрей шел со скоростью  $a$  км/ч в течение  $(2-b)$  ч, Богдан шел со скоростью  $b$  км/ч в течение  $(2-c)$  ч, Олеся шла со скоростью  $c$  км/ч в течение  $(2-a)$  ч, где  $a, b, c$  – некоторые, необязательно целые, числа. Какое расстояние между домом и школой?
4. На окружности выбраны 2016 точек. Они последовательно соединены по часовой стрелке так, что образовался 2016-угольник. Алиса и Базилио по очереди (начинает Базилио) проводят в нем диагонали, которые могут пересекаться только в вершинах многоугольника до тех пор, пока это возможно. По окончании, многоугольник будет разбит на треугольники, которые делятся на три типа – нулевые, единичные и двоичные, в зависимости от того, сколько из сторон треугольника совпадает со сторонами заданного многоугольника. За каждый нулевой треугольник в окончательной ситуации Алиса получает 1 золотой, а Базилио получает 1 золотой за каждый двоичный треугольник. Кто из них может получить больше золотых и на сколько при правильной игре обоих?
5. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$  и  $BE$ . Докажите, что  $\angle ACB = 60^\circ$  тогда и только тогда, когда  $AE + BD = AB$ .

### II тур

1. Учитель математики написал на доске три попарно различных числа. Саша заметил, что квадрат первого из них равен сумме квадратов второго и третьего, а квадрат второго равен квадрату суммы первого и третьего. Чему равна сумма чисел, написанных на доске?
2. В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  угол при вершине  $B$  равен  $120^\circ$ . Кроме того, выполнены равенства  $3BC = 3AB = AD$ . Найдите величину угла  $ADC$ .
3. Известно, что при некоторых целых значениях  $a$  и  $b$ , числа  $a^2 - 2ab + b^2 - 5a + 7b$  и  $a^2 - 3ab + 2b^2 + a - b$  делятся на 17. Докажите, что число  $ab - 12a + 15b$  тоже делится на 17.
4. На вечеринку пришло 2016 пар гостей (каждая пара состоит из мальчика и девочки). Известно, что каждый гость кроме своего партнера знаком еще хотя бы с одним гостем противоположного пола. Докажите, что организаторы вечеринки могут раздать всем гостям шляпы трех цветов так, что у каждого гостя будет хотя бы два знакомых в шляпах разного цвета.