Областная олимпиада юных математиков, 8 класс, 2015 г.

I тур

1. Трое велосипедистов стартуют одновременно и едут по сторонам треугольника ABC в таком порядке: $AB \to BC \to CA$. Известны их скорости на каждом из отрезков AB, BC, CA: у первого велосипедиста они равны соответственно 12, 10 и 20 км/ч, у второго – 15, 15 и 10 км/ч, у третьего – 10, 20 и 12 км/ч. Каким может быть значение угла ABC, если известно, что они прибыли в точку A одновременно?

2. Можно ли из всех 10 цифр 0, 1,..., 9, использовав каждую цифру ровно один раз, образовать два числа, одно из которых является квадратом другого?
Цифра 0 не может стоять на первом месте ни у какого из чисел.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) провели биссектрису AD, а в треугольнике ABD – биссектрису DE. Найдите величины углов треугольника ABC, если известно, что биссектрисы углов ABD и AED пересекаются на прямой AD.

4. Квадрат 9×9 разбит на 81 квадратик 1×1, 8 из которых покрашены в черный цвет, а остальные – в белый. Из квадрата 9×9 вырезают полностью белый прямоугольник (или квадрат). Какую наибольшую площадь может гарантировано иметь этот прямоугольник? Вырезать разрешается только вдоль линий, разделяющих квадрат на единичные квадратики.

5. Можно ли образовать треугольник из отрезков x, y, z, если они удовлетворяют равенству: $3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3z^2x^2 = x^4 + y^4 + z^4$?

II тур

1. Тридцать три богатыря стали в ряд так, что каждый богатырь с чётным номером оказался на 8 см ниже предыдущего и на 3 см ниже последующего. На сколько сантиметров первый богатырь выше последнего?

2. Пусть AL – биссектриса треугольника ABC. Точка N на стороне AB такова, что $LN \parallel AC$, K – точка пересечения CN и AL. Докажите, что если $BN = AC$, то $CL = CK$.

3. Докажите, что если для простого числа p и натурального числа k число k^3+pk^2 является точным кубом, то $p-1$ делится на 3.

4. На входе на платформу “$9\frac{3}{4}$” расположено 100 тумблеров. У каждого тумблера есть два возможных состояния – “включен” или “выключен”, но по виду тумблера невозможно определить, в каком из положений он находится. За один кнат разрешается переключить один тумблер. Вход откроется, если ровно 51 тумблер окажется в положении “включен”. Какую наименьшую сумму денег в кнатах надо иметь при себе, чтобы наверняка попасть на платформу?