Областная олимпиада юных математиков, 8 класс, 2014 г.

I тур

1. Известно, что в понедельник Настя добиралась на автомобиле на работу больше одного часа. Также известно, что в течение любого часа движения средняя скорость ее автомобиля равнялась 80 км/ч. Могла ли его средняя скорость в течение всего пути равняться 100 км/ч?

2. Известно, что M и N два последовательных четырехзначных числа. Какое наибольшее значение может принимать разность между суммами цифр чисел M и N?

3. Можно ли расставить в ячейках таблицы 3×5 числа $1, 2, \ldots, 15$ так, чтобы:
а) суммы чисел во всех строчках были одинаковыми, а также, чтобы суммы чисел во всех столбцах были одинаковыми, но, возможно, отличными от сумм чисел в строчках;
б) суммы чисел во всех трех строчках и всех пяти столбцах были одинаковыми?

4. Пусть $p(a)$ – наименьший делитель натурального числа $a > 1$, не равный 1.
а) Докажите, что уравнение:

$$m + n = (p(m) + p(n))(p(m) - p(n)),$$

где m и n взаимно простые натуральные числа, имеет бесконечно много решений в натуральных числах, не равных единице.
б) Найдите все такие натуральные числа $m > 1$, для которых существует по крайней мере одно натуральное $n > 1$ такое, что выполняется равенство:

$$m + n = (p(m) + p(n))(p(m) - p(n)).$$

5. Задан равносторонний треугольник ABC, у которого A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Прямая l проходит через вершину A, обозначим через P, Q – проекции точек B, C на прямую l соответственно. Обозначим через T – точку пересечения прямых B_1P и C_1Q. Докажите, что прямая A_1T перпендикулярна прямой l.

II тур

1. Делегация некоторой страны на Олимпийских играх будет состоять из спортсменов и чиновников. Средний возраст спортсменов на начало олимпиады составит 22 года, а чиновников – 47 лет. При этом средний возраст всех членов делегации окажется равным 41 году. Какова в этой делегации доля чиновников?

2. Натуральное число называется *упрощенным*, если оно является произведением ровно двух простых чисел (не обязательно различных). Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может оказаться упрощенными?

3. На сторонах AB и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно таким образом, что $AP = CD$, $AQ = BC$. Докажите, что отрезок PQ делится диагональю AC пополам.

4. В однокруговом турнире участвовали $2n$ команд (каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу). После окончания турнира оказалось, что каждая команда сыграла вничью столько же игр, сколько и выиграла. При каких n такое могло случиться?