

## Областная олимпиада юных математиков, 7 класс, 2013 г.

### I тур

1. Найдите все четырехзначные числа  $\overline{abcd}$ , для которых выполняется равенство  $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2013$ .

2. Среди 25 монет есть ровно 2 фальшивые. Есть волшебный горшок, в который можно положить 2 монеты, и он покажет количество фальшивых монет у этой пары. Покажите, как можно определить обе фальшивые монеты не больше, чем за 13 таких операций.

3. Петя последовательно выписывает в ряд на доске остатки от деления некоторого натурального числа  $n$  на  $10, 11, 12, \dots, 20$ . Выяснилось, что каждое следующее выписанное число больше предыдущего. Докажите, что в ряд выписаны 11 последовательных целых чисел (т. е. каждое следующее число больше предыдущего на 1).

4. Прямоугольное помещение разделено на 16 прямоугольных комнат. Комендант измерил периметры восьми комнат. Семь из восьми результатов его измерений схематично (т. е. без учета настоящих размеров комнат) показаны на рисунке, а результат восьмого обозначен  $x$ .

7		13	
		10	7
10	11		
	5		$x$

Найдите значение  $x$ .

5. Из картона вырезаны несколько прямоугольников. На плоскости нарисован квадрат, сторона которого не меньше любой стороны каждого из прямоугольников, а периметр не меньше суммы периметров прямоугольников. Докажите, что все вырезанные прямоугольники можно без перекрытий разместить в нарисованном квадрате (т. е. любые два прямоугольника могут иметь только такие общие точки, которые лежат на их сторонах, и точки каждого из прямоугольников не могут выйти за пределы квадрата).

### II тур

1. В стаде, состоящем из лошадей, одногорбых верблюдов и двугорбых верблюдов, в общей сложности 200 горбов. Сколько животных в стаде, если количество лошадей равно количеству двугорбых верблюдов?

2. Разрежьте клетчатый квадрат размером  $13 \times 13$  на 12 квадратов (разрезы могут проходить только по сторонам клеточек).

3. На шахматной доске отмечено 37 клеток. Докажите, что если на отмеченные клетки можно поставить 8 ладей, которые не бьют друг друга, то это можно сделать хотя бы двумя способами.

4. Делитель натурального числа называется *собственным*, если он не равен этому числу и единице. Натуральное число называется *редким*, если самый большой из его собственных делителей равен произведению самого маленького на следующий по величине. Сколько редких чисел оканчиваются цифрой 5?