Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

10 клас

10–1. Чи існують такі 8 попарно різних цілих чисел a, b, c, d, e, f, g, h, для яких коренями рівнянь $x^2+ax+b=0$, $x^2+cx+d=0$, $x^2+ex+f=0$ та $x^2+gx+h=0$ є числа a, b, c, d, e, f, g, h у деякому порядку?

10–2. Дана дошка 8×8. *Справжньою* діагоналлю цієї дошки будемо називати таку діагональ, що містить принаймні три клітинки. Андрій та Олеся грають на цій дошці у гру. Вони по черзі (починає Андрій) виставляють на дошку однакові фішки. Ставити дві фішки в одну клітинку забороняється. Якщо після чергового ходу виявляється, що у кожній горизонталі та вертикалі стоїть принаймні одна фішка, то перемагає Олеся. Якщо ж після чергового ходу у кожній зі справжніх діагоналей опиняється принаймні одна фішка, то перемагає Андрій. У разі, коли після деякого ходу одночасно настає перемога Андрія та Олесі, оголошується нічия. Чи може хтось з гравців забезпечити собі перемогу, якщо кожен прагне перемогти?

10–3. У гострокутному трикутнику ABC виконано: $\angle ACB=45^\circ$, M – точка перетину медіан, O – центр описаного кола. Відомо, що $OM=1$ та $OM \parallel BC$. Знайдіть довжину сторони BC.

10–4. Нехай d – натуральний дільник натурального числа m, (a_i) та (b_i) -- дві арифметичні прогресії з натуральними членами. Відомо, що існують такі індекси i та j, для яких $(a_i, b_j)=1$, а також такі індекси k та l, для яких $(a_k, b_l)=m$. Доведіть, що можна підібрати такі індекси t та s, для яких $(a_t, b_s)=d$.
Тут через (x, y) позначений найбільший спільний дільник чисел x, y.

Чернігів, 21 березня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

10 клас

10–5. На вечірці було 12 сімейних пар. Організатори вечірки пронумерували пари числами 1, 2, 3, …, 12. По завершенню вечірки виявилось, що кожна з 12 дружин випила або 1 пляшку кока-коли або жодної. Кожен чоловік випив $2^k a_k$ пляшок кока-коли, де a_k – кількість пляшок, випитих його дружиною, а k – номер цієї пари. Відомо, що усього чоловіками було випито 2018 пляшок. Скільки сімейних пар не випили жодної пляшки кока-коли?

10–6. Задано опуклий багатокутник $A_1A_2...A_{2017}$. Розглянемо такі 2017 кутів: $\angle A_{1009}A_1A_{1010}$, $\angle A_{1010}A_2A_{1011}$, …, $\angle A_{1008}A_{2017}A_{1009}$. Серед цих кутів виберемо найбільший. Яке найменше значення він може приймати?

10–7. Задано натуральне число $n \geq 3$. Олеся грає у таку гру: на початку гри фішка розташована на декартовій площині XOY у початку координат. Олеся пересуває фішку за такими правилами: фішку можна рухати по площині тільки паралельно координатним осям. На першому кроці фішка повинна переміститися на відстань $1 = 2^0$, на другому кроці – на відстань $2 = 2^1$, на третьому – на відстань $4 = 2^2$, і так далі (пересування фішки на кожному новому кроці є удвічі довшим, у порівнянні з попереднім кроком). Усього Олеся робить n кроків. Її програш у цій грі дорівнює максимальній відстані від фішки до початку координат протягом усієї гри (не обов'язково після n-го кроку). Якого найменшого програшу може домогтися Олеся?

10–8. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ac}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \geq \frac{3bc+ac-ab}{2ab+ac}+\frac{3ac+ab-bc}{2bc+ab}+\frac{3ab+bc-ac}{2ac+bc}.$$

Чернігів, 22 березня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів