Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

9 клас

9–1. Додатні числа a, b задовольняють умову: $ab=1$. Доведіть, що справджується нерівність: $\frac{3a+1}{b+1}+\frac{3b+1}{a+1}\ge 4$. Для яких пар (a, b) можлива рівність?

9–2. На дошці намальовано n комірок, що перенумеровані зліва направо числами $1, 2, ..., n$. У кожній комірці записано знак «$+$». Андрійко має зробити n ходів. Першим ходом він міняє знак на протилежний у одній довільній комірці на свій вибір. Другим ходом -- у двох довільних сусідніх комірках, далі -- у трьох сусідніх, і так далі. Передостаннім ходом він міняє знак у $(n-1)$-ній комірці, що стоять поспіль, і останнім ходом змінює знак в усіх n комірках. При яких n Андрійко зможе по завершенні процесу отримати в усіх комірках знак «$-$»?

9–3. Для якого найбільшого натурального $n \ge 3$ існує

а) опуклий n-кутник,

б) довільний n-кутник,

кути якого задовольняють такі умови:

- вони вимірюються цілим числом градусів;
- відношення будь-яких двох кутів (більшого до меншого) є натуральним числом більшим за одиницю?

9–4. Відрізок AB – діаметр кола w , CD – деяка хорда цього кола, що перпендикулярна AB. Точка O – центр кола w. Через точку E – середину відрізка CO – проведено пряму AE, яка вдруге перетинає коло w у точці F . Відрізок BC перетинає відрізок AF у точці M, а відрізок DF – у точці L. Описане коло ΔDLM вдруге перетинає коло w у точці K. Доведіть, що $KM = MB$.

Чернігів, 21 березня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

9 клас

9–5. Натуральні числа k та N задовольняють умову:

$$N\cdot(N+1)\cdot\ldots\cdot(N+k)=6952862280.$$

Знайдіть усі можливі значення k та N, якщо відомо, що остання цифра числа N дорівнює 1.

9–6. Нехай w_1, w_2 – два кола на площині, що не перетинаються. Пряма AB – їх спільна зовнішня дотична, O – точка перетину спільних внутрішніх дотичних, H – основа перпендикуляру, що опущений з O на AB. З точки H провели дотичні HC, HD до кіл w_1, w_2 відповідно, відмінні від AB. Доведіть, що HO – бісектриса $\angle CHD$.

9–7. На дошці записано число 2017. На кожному кроці ми дописуємо на дошку ще одне натуральне число так, щоб виконувались умови: середнє арифметичне усіх чисел, що на даний момент записані на дошці, повинно бути натуральним і меншим, від середнього арифметичного, що було обчислене на попередньому кроці. Яку максимальну кількість чисел ми зможемо написати на дошці, враховуючи початкове?

9–8. Задано натуральне число $n\geq 3$. Олеся грає у таку гру: на початку гри фішка розташована на декартовій площині XOY у початку координат. Олеся пересуває фішку за такими правилами: фішку можна рухати по площині тільки паралельно координатним осям. На першому кроці фішка повинна переміститися на відстань $1=2^0$, на другому кроці – на відстань $2=2^1$, на третьому – на відстань $4=2^2$, і так далі (пересування фішки на кожному новому кроці є удвічі довшим, у порівнянні з попереднім кроком). Усього Олеся робить n кроків. Її програш у цій грі дорівнює максимальній відстані від фішки до початку координат протягом усієї гри (не обов'язково після n-го кроку). Якого найменшого програшу може домогтися Олеся?

Чернігів, 22 березня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів