LV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2015

<u>Первый день</u>

11 класс

1. Найдите все пары действительных чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющие равенству:

$$\{x\}+\{y\}=[x+y].$$

Здесь через $[a]$ *обозначена целая часть числа* a*, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее* a*, а через* $\{a\}$ *- дробная часть числа* a*, т.е.* $\{a\}=a-[a]$.

2. Натуральные числа a, p удовлетворяют условию: $p=2^a-1$. Найдите все значения a, для которых число $\frac{1}{2}(p^2+1)$ является квадратом целого числа.

3. Есть белый квадрат 8×8. За один ход Дима может выбрать полностью белый квадратик 2×2 и закрасить в черный цвет любые две клетки этого квадратика, расположенные по диагонали. Какое максимальное число клеток по таким правилам Дима сможет закрасить?

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с углами ABC и BCD равными $120°$, O - точка пересечения диагоналей, M - середина стороны BC, K - точка пересечения прямых MO и AD. Известно, что $\angle BKC=60°$. Докажите, что $\angle BKA=\angle CKD=60°$.

Черновцы, 23 марта 2015 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

LV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2015

Второй день

11 класс

5. ***а)*** Существуют ли 2015 натуральных чисел a_1, a_2, …, a_{2015} таких, что любые два из них взаимно просты, а число $a_1 a_2 ... a_{2015} - 1$ является произведением двух последовательных нечетных чисел?

б) Существуют ли 2015 натуральных чисел a_1, a_2, …, a_{2015} таких, что любые два из них взаимно просты, а число $a_1 a_2 ... a_{2015} - 1$ является произведением двух последовательных четных чисел?

6. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H. Построим две окружности w_1 и w_2 с центрами в точках H и B и радиусами HB_1 и BB_1 соответственно. Из точки C к окружностям w_1 и w_2 проведем касательные, которые касаются этих окружностей в точках N и K, отличных от B_1, соответственно. Докажите, что точки A_1, N и K лежат на одной прямой.

7. Последовательность натуральных чисел (a_n) задается правилом: $a_1 = a$, $a_2 = b$, где a и $b-$ натуральные, а для всех $n \geq 2$ a_{n+1} равно количеству индексов $i, 1 \leq i \leq n$, таких, что $a_i = a_n$. Например, для $a = 2, b = 1$ начало последовательности будет выглядеть так (2; 1; 1; 2; 2; 3…). Найдите все пары натуральных чисел (a, b), для которых, начиная с некоторого места, последовательность $(a_n + a_{n+1})$ будет неубывающей.

8. Для произвольных различных чисел a, b решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + z = 2y + (a+b), \\ 3x^2 + 3xz = y^2 + 2(a+b)y + ab, \\ x^3 + 3x^2 z = y^2(a+b) + 2yab. \end{cases}$$

Черновцы, 24 марта 2015 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов