LV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2015

Первый день

10 класс

1. Решите уравнение:

$$ctg[x] \cdot ctg\{x\} = 1.$$

Здесь через $[a]$ *обозначена целая часть числа* a*, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее* a*, а через* $\{a\}$ *- дробная часть числа* a*, т.е.* $\{a\} = a - [a]$.

2. Внутри правильного треугольника ABC выбрана точка M. Пусть точки M_1, M_2, M_3 симметричны ей относительно сторон BC, AC, AB треугольника соответственно. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3}$ равна сумме векторов $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

3. Натуральные числа a, p удовлетворяют условию: $p = 2^a - 1$. Найдите все значения a, для которых число $\frac{1}{2}(p^2 + 1)$ является квадратом целого числа.

4. Задан конечный набор натуральных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. За один ход разрешается выбрать любую пару чисел из тех, что остались, меньшее из двух – удалить, а большее – увеличить на 1. Какое наименьшее число можно получить в конце?

Черновцы, 23 марта 2015 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

LV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2015

Второй день

10 класс

5. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся нацело на 7, и имеющее в своей записи только нечетное цифры, сумма которых 2015.

6. ***а)*** Андрей и Олеся получили по набору из карточек, на которых написаны все целые числа от 1 до 2015. После этого Олеся оставляет себе некоторое число карточек (но не все) из своего набора, а остальные откладывает. Андрей делает точно также. На координатной плоскости рассматриваются 2015^2 точек, имеющих обе целые координаты в пределах от 1 до 2015 каждая. Олеся красит в синий цвет те из этих точек, у которых первая координата равна числу на одной из ее карточек, а вторая – на одной из карточек Андрея, а Андрей красит в желтый цвет те точки, у которых первая координата равна числу на одной из его карточек, а вторая – на одной из Олесиных карточек (при этом некоторые точки могут быть окрашены в два цвета). Докажите, что при любом выборе карточек, они не смогут достичь того, чтобы каждая из 2015^2 точек была окрашена по крайней мере в один из двух цветов?

б) К Андрею и Олесе присоединилась Оксана, которая взяла себе все карточки, отложенные Олесей и Андреем. После этого они уже втроем красят точки на новой чистой плоскости так: Олеся красит в синий цвет те из этих точек, у которых первая координата равна числу на одной из ее карточек, а вторая – на одной из карточек Андрея, Андрей красит в желтый цвет те точки, у которых первая координата равна числу на одной из его карточек, а вторая – на одной из Оксаниных карточек, а Оксана красит в зеленый цвет те точки, у которых первая координата равна числу на одной из ее карточек, а вторая – на одной из Олесиных карточек (снова при этом некоторые точки могут бути окрашены в несколько цветов). При каком выборе карточек Олесей и Андреем они втроем закрасят каждую из 2015^2 точек по крайней мере в один цвет?

7. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H. Построим две окружности w_1 и w_2 с центрами в точках H и B и радиусами HB_1 и BB_1 соответственно. Из точки C к окружностям w_1 и w_2 проведем касательные, которые касаются этих окружностей в точках N и K, отличных от B_1, соответственно. Докажите, что точки A_1, N и K лежат на одной прямой.

8. Найдите все такие функции $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, для которых для всех действительных x, y, выполняется равенство:

$$4f\left(x+f(y)\right)=f(x)+f(y)+f(xy)+1.$$

Черновцы, 24 марта 2015 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов