LIV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2014

Первый день

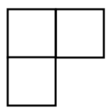
9 класс

1. Две окружности γ_1 и γ_2 одинакового радиуса пересекаются в точках A и B. Окружность γ, с центром в точке A, пересекает окружность γ_1 в точках C и D. Докажите, что точки пересечения окружностей γ и γ_2 принадлежат прямым BC и BD.

2. Андрей и Олеся играют в такую игру. Вначале Андрей расставляет по окружности все 10 цифр. После этого Олеся выбирает цифру, и от этой цифры двигается по часовой стрелке, группируя последовательно цифры по 2. Таким образом, образуется 5 двузначных чисел (число вида 06 также считается как однозначное число 6). После этого Олеся складывает эти 5 чисел и выигрывает полученную сумму у Андрея. Какой наименьший проигрыш может гарантировать себе Андрей?

3. Пусть $a, b > 0$ действительные числа. Известно, что $(a^2+b^2)(a-b+1) \geq b$. Докажите, что $a(a+b) \geq b$.

4. Какое наибольшее число уголков из трех клеток (рис.) можно разместить внутри клетчатого квадрата 7×7 так, чтобы они попарно не касались сторонами? (Касание углами допускается.)



Киев, 25 марта 2014 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

LIV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2014

Второй день

9 класс

5. Для каких натуральных n существуют действительные числа $a_1, a_2, ..., a_n$, удовлетворяющие условиям:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n > 0 \text{ и } a_1^3 + a_2^3 + ... + a_1^3 < 0.$$

6. Местность разбита на квадраты, которые образуют большой квадрат 5×5. В некоторых маленьких квадратах находятся мины (не более одной в квадрате), но в каких именно квадратах они размещены неизвестно. У капитана группы саперов есть план местности: квадрат 5×5, в клетках которого записаны числа, показывающие сколько у соответственного квадрата местности соседних квадратов, в которых есть мина (наличие мины в самом данном квадрате не учитывается). Соседними считаются квадраты, имеющие общую вершину или сторону. Всегда ли сможет капитан определить общее число мин на всем поле?

7. Максим отгадывает натуральное число n, про которое ему известно, что оно имеет ровно 250 натуральных делителей $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{250} = n.$ За один ход Максим может указать некоторый индекс j, $1 \le j \le 249$, и узнать значение d_j. При этом ему запрещено узнавать d_j, если он уже знает d_{251-j}. За какое минимальное число ходов Максим может гарантировано отгадать число n?

8. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность w_1, AN и CK его высоты, H – ортоцентр. Окружность w_2, описанная вокруг ΔNBK, второй раз пересекает окружность w_1 в точке P. Прямые CA и BP пересекаются в точке S. Прямая SH второй раз пересекает окружность w_2 в точке Q. Докажите, что прямые NQ, PK и CA пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Киев, 26 марта 2014 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов