LIV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2014

<u>Первый день</u>

8 класс

1. Известно, что к натуральному числу n можно дописать справа любую ненулевую цифру c и полученное число будет делиться нацело на c. Найдите наименьшее значение, которое может принимать число n.

2. Две окружности γ_1 и γ_2 одинакового радиуса пересекаются в точках A и B. Окружность γ, с центром в точке A, пересекает окружность γ_1 в точках C и D. Докажите, что точки пересечения окружностей γ и γ_2 принадлежат прямым BC и BD.

3. Существуют ли натуральные числа $a_1, a_2, ..., a_{2014}$, для которых выполняется равенство:

$$a_1 \cdot 2013^{a_1} + a_2 \cdot 2013^{a_2} + ... + a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} = a_{2014} \cdot 2013^{a_{2014}}.$$

4. ***а)*** Можно ли обойти клетчатую доску 4×6 ходом шахматного коня так, чтобы побывать на каждом поле ровно 1 раз?
б) Можно ли при этом это сделать так, чтобы из последнего поля можно было ходом коня попасть на начальное?
Шахматный конь может пойти на любое поле доски, если оно расположено на другом конце украинской буквы „Г”, т.е. сначала конь перемещается на две клетки по горизонтали или по вертикали, а далее на одну клетку перпендикулярно начальному направлению.

Киев, 25 марта 2014 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

LIV Всеукраинская олимпиада юных математиков, 2014

<u>*Второй день*</u>

8 класс

5. Есть n мышиных норок, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Мыши играют в такую игру. Они должны по очереди выбегать из своих норок и бежать строго по прямой до одной из тех норок, которые находятся на максимальном расстоянии от их собственной норы. Мышь, путь которой должен пересечь в некоторой точке, отличной от норы, путь другой мыши, пробежавшей перед этим, остается на месте. Порядок, в котором они бегают, мыши выбирают на свое усмотрение.

а) Какое максимальное число мышей сможет пробежать свой путь при таких условиях?

б) Какое минимальное число мышей должно пробежать свой путь при таких условиях?

6. Найдите все квадратные трехчлены $f(x)=ax^2+bx+c$ с целыми коэффициентами a, b, c, которые для каждого действительного числа x удовлетворяют неравенству:

$$\tfrac{1}{2}x^2+2x+2016 \le f(x) \le \tfrac{3}{2}x^2+6x+2020.$$

7. Про простые числа p,q,r известно, что числа $pq+1$, $pr+1$, $qr-p$ – являются точными квадратами целых чисел. Докажите, что число $p+2qr+2$ – также точный квадрат целого числа.

8. На прямой слева направо расположены точки A, D и C так, что $CD=2AD$. Точка B удовлетворяет условиям $\angle CAB=45°$ и $\angle CDB=60°$. Найдите градусную меру угла BCD.

Киев, 26 марта 2014 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов