

ЛІ Всеукраїнська олімпіада, 2011

9 клас. І тур

1. Розв'язати рівняння:

$$[|x|] = |[x]|,$$

де $[a]$ – це ціла частина числа a , тобто найбільше ціле число, що не перевищує a .

2. У опуклому 100-кутнику відмітили усі його вершини, а також декілька точок усередині цього багатокутника. Жодні три з відмічених точок не лежать на одній прямій. Відмічені точки з'єднали між собою таким чином, що багатокутник виявився повністю розбитим на 2011 опуклих багатокутників. Доведіть, що принаймні один із цих багатокутників має парну кількість сторін.

3. Для невід'ємних чисел a, b, c таких, що $a + b + c = 1$, доведіть нерівність:

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} \leq \sqrt{2} \left(\sqrt{ab+bc+ca} + 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \right).$$

4. На сторонах XY, YZ та ZX трикутника XYZ позначили відповідно точки C, E та A . На відрізках AX, CY та EZ відповідно відмітили точки B, D та F таким чином, що $BC \parallel AD, DE \parallel CF, AF \parallel BE$. Чи може статися так, що прямі XF, YB і ZD перетнуться в одній точці?

ЛІ Всеукраїнська олімпіада, 2011

9 клас. II тур

5. Розв'яжіть нерівність:

$$\max \{x^2 + 3x + 3, x^{2011} + x^4 + x^2 + x + 1\} \leq \\ \leq \min \{1 - x - x^2, x^{2011} + x^4 + x^2 + x + 1\}.$$

6. У трикутнику ABC точка M – середина сторони BC . На стороні AB відмітили точку N так, що $NB = 2AN$. Виявилось, що $\angle CAB = \angle CMN$. Чому дорівнює відношення $AC : BC$?

7. Яка найменша кількість кольорів потрібна для того, щоб зафарбувати клітчасту дошку розміром 2011×2011 таким чином, щоб кожні три клітинки на дошці, які утворюють одну з фігурок триміно (пряме триміно або кутове триміно) у будь якій орієнтації, були пофарбовані у різний колір? Кожен одиничний квадратик фарбується повністю в один колір.

8. Назвемо натуральне число *близнюком*, якщо у нього є два дільники з множини D , різниця між якими дорівнює 2. З'ясуйте, яких чисел більше серед перших 20112012 чисел: близнюків чи тих, що не є близнюками, якщо

а) D – множина усіх натуральних дільників числа від 1 до самого числа включно;

б) D – множина усіх натуральних дільників числа за винятком 1 та самого числа.