

LI Всеукраїнська олімпіада, 2011

8 клас. 1 тур

1. Знайдіть усі пари цілих чисел $(x; y)$, що задовольняють рівність:

$$\left| x + |x + |x|| \right| \cdot \left| |-y| - y \right| - y = 2011.$$

2. У трикутнику ABC кут A вдвічі більший від кута B , CD – бісектриса кута C . Доведіть, що $BC = AC + AD$.

3. Для попарно різних натуральних чисел a, b, c, d число $ab + cd$ ділиться націло на число $ac + bd$. Доведіть, що число $ac + bd$ складене.

4. З квадрата розміром 2011×2011 вирізали одну кутову клітинку. Чи можна фігуру, що утворилась, розрізати вздовж ліній сітки на квадрати, кількість яких не перевищує 120?

LI Всеукраїнська олімпіада, 2011

8 клас. II тур

5. Розв'яжіть нерівність:

$$\max \{|x| - 1, x^2 - 1\} \leq \min \{x^2 - 1, 1 - |x|\}.$$

6. Назвемо натуральне число близнюком, якщо воно має два натуральних дільники, різниця між якими дорівнює 2. З'ясуйте, яких чисел більше серед перших 20112012 натуральних чисел: близнюків чи тих, що не є близнюками.

7. На прямій розташовано $n \geq 3$ нірок. В одній із цих нірок ховається мишеня Джеррі. У kota Тома є можливість засунути лапу у будь-яку нірку та піймати Джеррі, якщо він ховається у цій нірці. Мишеня після кожної спроби Тома обов'язково перебігає у сусідню справа чи зліва нірку. Чи може Том гарантовано спіймати Джеррі?

8. У паралелограмі $ABCD$ $\angle ABC = 105^\circ$. Відомо, що всередині цього паралелограма існує така точка M , що трикутник BMC рівносторонній та $\angle CMD = 135^\circ$. Нехай точка K – середина сторони AB . Знайдіть градусну міру кута BKC .