L Всеукраїнська олімпіада, 2010
11 клас. 1 тур

1. При яких дійсних числах a і b найбільше з чисел $3a^2 + 2b$ і $3b^2 + 2a$ приймає найменше значення?

2. Розв'яжіть в цілих невід'ємних числах k, n рівняння

$$2^{2k+1} + 9 \cdot 2^k + 5 = n^2.$$

3. Всередині паралелограма $ABCD$ відмічені точки P та Q, що симетричні відносно точки перетину діагоналей паралелограма. Доведіть, що кола, описані навколо трикутників ABP, CDP, BCQ та ADQ, мають спільну точку.

4. Відомо, що α – таке ірраціональне число, для якого існують числа x, y, такі, що $x + y = \alpha$, а $x^k + y^k$ є раціональним числом для усіх натуральних k від 2 до n. Для якого найбільшого n це можливо?

L Всеукраїнська олімпіада, 2010
11 клас. 2 тур

5. Для якого найменшого натурального числа N можна замість знаків "$*$" у виразі $1*2*3*\ldots*N$ поставити знаки "$+$" та "$-$" таким чином, щоб одержати значення виразу рівним:

а) 2010; б) 2011?

6. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кути ABC та BCD не менші від 120°. Доведіть, що $AC + BD > AB + BC + CD$.

7. Знайдіть усі такі функції $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, що

1) для довільних цілих чисел x, y $f(x + f(x + 2y)) = f(2x) + f(2y)$;

2) $f(0) = 2$.

8. Числа 1, 2, $\ldots$, n у деякому порядку розставлені в ряд. З ними дозволяється робити таку операцію: беруть довільні дві пари сусідніх елементів, які не мають спільних членів та міняють ці пари місцями. Чи завжди можна за скінченну кількість таких операцій одержати монотонний (зростаючий або спадний) набір чисел, якщо:

а) $n = 2009$; б) $n = 2010$?