L Всеукраїнська олімпіада, 2010
10 клас. I тур

1. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(-2, 1)$ и $B(2, 9)$ и не имееет общих точек с осью абцисс. Найдите все значения, которые может принимать абцисса вершины параболы.

2. Для некоторых действительных чисел x и y числа $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ и $x^4 + y^4$ рациональны. Обязательно ли число $x + y$ должно быть рациональным?

3. У Андрея есть карточки, которые с одной стороны одинаковы, а на другой стороне написаны числа 1, 3, 5,. . . , 2009, а у Леси есть такие же карточки, только с числами 2, 4, 6, . . . , 2010. Леся выкладывает свои карточки в один ряд числами вниз (то есть сначала значений чисел не видно), после этого Андрей выкладывает свои карточки поверх Лесиных. Таким образом, получилось 1005 пар карточек. После этого, числа на карточках из одной пары сравнивают и тому из игроков, чье число больше, начисляют 1 балл. Андрею известно, что Леся выкладывает свои карточки с числами в порядке возрастания слева направо, начиная с некоторого места. Когда она доходит до последней позиции, то дальше снова начинает выкладывать карточки в порядке возрастания с самой левой позиции. Например: 20, 22, 24, . . . , 2010, 2, 4, . . . , 18. Андрей пытается набрать как можно больше очков. Какое наибольшее количество очков он может себе обеспечить, каким бы не оказалось расположение карточек с числами у Леси?

4. Точка P принадлежит треугольнику ABC. Центры вписанных окружностей в треугольники PBC, PAC, PAB обозначим I_A, I_B и I_C соответственно. Обозначим через I_P центр окружности, вписанной в треугольник $I_AI_BI_C$. Докажите, что для точки P, удовлетворяющей условию $P = I_P$, выполнены равенства $AP - BP = AC - BC$, $BP - CP = BA - CA$, $CP - AP = CB - AB$.

L Всеукраїнська олімпіада, 2010
10 клас. II тур

5. Решите уравнение: $\sin\dfrac{\pi\sqrt{x}}{4}+\cos\dfrac{\pi\sqrt{2-x}}{4}=\sqrt{2}$.

6. Найдите наименьшее натуральное число k, для которого существует такой набор из 2010 попарно различных натуральных чисел, что произведение любых k чисел этого набора делится нацело на произведение остальных $2010-k$ чисел набора.

7. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M соответственно так, что $AK=KM=MC$. Пусть N – точка пересечения прямых AM и CK, P – основание перпендикуляра, опущенного из точки N на прямую KM, а точка Q – такая точка отрезка KM, что $MQ=KP$. Докажите, что вписанная окружность треугольника KMB касается стороны KM в точке Q.

8. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2+(x_n-x_1)^2,$$

если x_1, x_2, …, x_n – попарно различные целые числа.