L Всеукраїнська олімпіада, 2010
9 клас. 1 тур

1. Числа $a_1 = 1$, $a_2 = 1 - \frac{1}{2}$, $a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $a_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\ldots$, $a_{2009} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2009}$, $a_{2010} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010}$ записали у порядку зростання. З'ясуйте яке число у цій розстановці записане:

а) на 1000-му місці;

б) на 2000-му місці?

2. Нехай $P(x)$, $Q(x)$ та $R(x)$ – многочлени, при цьому $Q(x)$ та $R(x)$ набувають лише невід'ємних значень. Відомо, що рівняння

$$P(x) + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(x) + \sqrt{R(x)}} = 0$$

має нескінченно багато коренів. Чи випливає звідси, що будь-яке дійсне число є коренем данного рівняння?

3. Дано гострокутний трикутник ABC. На серединних перпендикулярах до його сторін AB і BC відповідно відмітили точки P і Q, а M і N – їх проекції на сторону AC (дивись рис.). З'ясувалося, що $2MN = AC$. Доведіть, що описане коло трикутника PBQ проходить через центр описаного кола трикутника ABC.

4. Натуральні числа a, b такі, що число $m = a + b + 2\sqrt{ab+1}$ є натуральним. Доведіть, що m – складене число.

L Всеукраїнська олімпіада, 2010
9 клас. 2 тур

5. Яку максимальну кількість вершин може мати опуклий багатокутник, у якого усі кути вимірюються цілим числом градусів?

6. Навколо гострокутного трикутника ABC описане коло. Хорда AD є бісектрисою кута трикутника та перетинає сторону BC у точці L, хорда DK перпендикулярна до його сторони AC і перетинає її в точці M. Знайдіть відношення $\dfrac{AM}{MC}$, якщо $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{1}{2}$.

7. Куб складається з n^3 одиничних кубиків. Пряму, що проходить через центри рівно n одиничних кубиків назвемо "цікавою". Чи існує таке значення $n > 1$, при якому кількість цікавих прямих є степенем числа 2?

8. Дійсні числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ задовольняють умови $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$ та $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$na_1 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$