XLIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2009

<u>11 клас</u>

<u>*Перший день*</u>

11.1. Для яких значень параметру a система рівнянь $\begin{cases} x+y+z=0, \\ (xy+yz)+axz=0, \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

11.2. Розглянемо множину $M=\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$ та усі її чотирьохелементні підмножини. Яких серед цих підмножин більше: тих добуток елементів у яких більший за 2009, чи тих, добуток елементів у яких менший за 2009?

11.3. В трикутнику ABC точки M і N – середини сторін BC і AC відповідно. Всередині ΔABC взято точку P таку, що $\angle BAP=\angle PBC=\angle PCA$. Відомо, що $\angle PNA=\angle AMB$. Довести, що ΔABC – рівнобедрений.

11.4. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, для яких виконується наступна умова: для довільних попарно нерівних натуральних x,y,z,t таких, що $x^2+y^2+z^2=2t^2$ та $НСД\{x,y,z,t\}=1$, і при цьому має місце рівність: $2P^2(t)+2P(xy+yz+zx)=P^2(x+y+z)$.

XLIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2009

11 клас

Другий день

11.5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^3 = 2y^3 + y - 2, \\ y^3 = 2z^3 + z - 2, \\ z^3 = 2x^3 + x - 2. \end{cases}$$

11.6. Знайдіть усі функції f, які визначені на множині цілих чисел та приймають цілі значення, такі, що для усіх цілих m та n виконується рівність:

$$f(n|m|) + f(n(|m|+2)) = 2f(n(|m|+1)).$$

11.7. Всередині трикутника ABC відмічено точку O так, що $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$. Доведіть нерівність:

$$\frac{AO^2}{BC} + \frac{BO^2}{CA} + \frac{CO^2}{AB} \geq \frac{AO + BO + CO}{\sqrt{3}}.$$

11.8. З кожного міста Далекої-Далекої країни виходить не менше, ніж $m \geq 3$ доріг (усі дороги з двобічним рухом). Причому система доріг влаштована таким чином, що з будь-якого міста можна дістатись до будь-якого іншого (можливо, через декілька проміжних міст). Король сусідньої країни вирішив відвідати усі міста Далекої-Далекої країни, але таким чином, щоб у кожному місті побувати лише один раз. Виявилось, що це зробити неможливо. Яка найменша кількість міст може бути в Далекій-Далекій країні?