

XLIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2009

9 клас

Перший день

9.1. Зобразіть на координатній площині XOY множину точок, координати яких задовольняють рівності:

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 2 - x^2 - y^2.$$

9.2. На новорічному вечері у класі кожний хлопчик подарував кожній дівчинці по 1 цукерці „Білочка”, а кожна дівчинка кожному хлопчику – по одній цукерці „Караван”. Після цього кожний хлопчик з’їв по 2 з подарованих цукерок, а кожна дівчинка – по 3 цукерки, з тих що їй щойно подарували. Вийшло так, що дітьми була з’їдена чверть усіх подарованих цукерок. Яка найбільша кількість дітей могла навчатись у цьому класі?

9.3. В трикутнику ABC точки M і N – середини сторін BC і AC відповідно. Всередині цього трикутника взято точку P таку, що $\angle BAP = \angle PCA = \angle MAC$. Довести, що $\angle PNA = \angle AMB$.

9.4. Нехай $x \leq y \leq z \leq t$ – дійсні числа такі, що $xy + xz + xt + yz + yt + zt = 1$.

а) Доведіть, що $xt < \frac{1}{3}$.

б) Знайдіть найменше значення C , при якому нерівність $xt < C$ виконується при всіх можливих значення x і t .

XLIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2009

9 клас

Другий день

9.5. Попарно різні дійсні числа a, b, c задовольняють умову $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$. Знайдіть, яких значень може набувати добуток abc ?

9.6. Знайдіть усі прості числа p та натуральні числа m , які задовольняють рівняння: $2p^2 + p + 9 = m^2$.

9.7. Прямокутний папір у клітинку має розмір 2009×4018 . Розглядаються рамки прямокутників розмірами $n \times n$ та $n \times (n + 2)$, що складаються з клітин, які мають принаймні одну спільну сторону з межею прямокутника (на рис.22 зображено приклад рамки для прямокутника розмірами $n \times (n + 2)$, аналогічно виглядає рамка для прямокутника $n \times n$). До рамок прямокутників також будемо відносити прямокутники розміром 1×1 , 2×2 , 1×3 та 2×4 . Варя і Таня по черзі зафарбовують в межах заданого прямокутника вказані рамки. При цьому кожна нова рамка не повинна мати спільних клітин з жодною з попередніх. Починає гру Варя, переможцем вважається та дівчинка, якій вдасться зафарбувати останню рамку. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

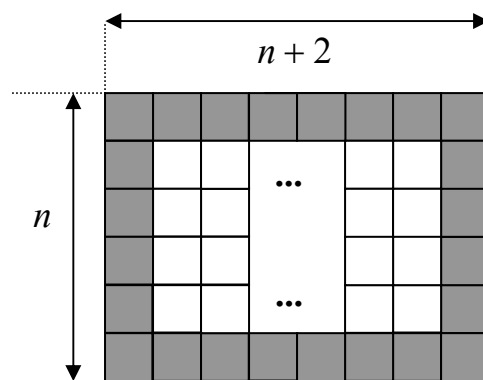


Рис.

9.8. В прямокутній трапеції $ABCD$ бічна сторона CD перпендикулярна основам. Коло з діаметром AB перетинає основу AD в точках A і P , дотична до цього кола в точці P перетинає пряму CD в точці M . З точки M проведена друга дотична, яка дотикається до кола в точці Q . Доведіть, що пряма BQ ділить відрізок CD навпіл.