XLIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2009

8 клас

Перший день

8.1. Знайдіть усі пари натуральних чисел n,k, для яких виконується рівність $n^3 - 2 = k!$, де через $k!$ позначений добуток перших k натуральних чисел, тобто $k! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k$, крім того вважають, що $1! = 1$.

8.2. Дано опуклий 2009 – кутник.

а) Яку найбільшу кількість вершин цього багатокутника можна відмітити, щоб ніякі дві з відмічених вершин не були з'єднані стороною багатокутника?

б) Яку найбільшу кількість вершин цього багатокутника можна відмітити, щоб серед будь-яких трьох відмічених вершин знайшлась принаймні одна, яка не з'єднана стороною багатокутника з жодною з двох інших?

8.3. На новорічному вечері у класі кожний хлопчик подарував кожній дівчинці по 1 цукерці „Білочка”, а кожна дівчинка кожному хлопчику – по одній цукерці „Караван”. Після цього кожний хлопчик з'їв по 2 з подарованих цукерок, а кожна дівчинка – по 3 цукерки, з тих що їй щойно подарували. Вийшло так, що дітьми була з'їдена чверть усіх подарованих цукерок. Яка найбільша кількість дітей могла навчатись у цьому класі?

8.4. В трикутнику ABC $\angle ABC = 120°$. Бісектриса цього кута перетинає сторону AC в точці M, а бісектриса кута, суміжного з кутом $\angle BCA$, перетинає пряму AB у точці P. Відрізок MP перетинає сторону BC у точці K. Доведіть, що $\angle AKM = \angle KPC$.

XLIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2009

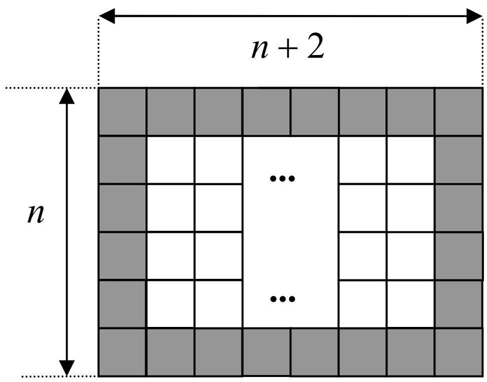
8 клас

Другий день

8.5. Цілі числа a,b,c задовольняють умову $ab+bc+ca=1$. Доведіть, що число $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)$ є повним квадратом деякого натурального числа.

8.6. На стороні AB гострокутного трикутника ABC обрано точку K, точка M – середина сторони BC, відрізки AM та CK перетинаються в точці F. Відомо, що $KF=AK$. Доведіть, що $CF=AB$.

8.7. Прямокутний папір у клітинку має розмір 2009×4018. Розглядаються рамки прямокутників розмірами $n\times n$ та $n\times(n+2)$, що складаються з клітин, які мають принаймні одну спільну сторону з межею прямокутника (на малюнку зображено приклад рамки для прямокутника розмірами $n\times(n+2)$, аналогічно виглядає рамка для прямокутника $n\times n$). До рамок прямокутників також будемо відносити прямокутники розміром 1×1, 2×2, 1×3 та 2×4. Варя і Таня по черзі зафарбовують в межах заданого прямокутника вказані рамки. При цьому кожна нова рамка не повинна мати спільних клітин з жодною з попередніх. Починає гру Варя, переможцем вважається та дівчинка, якій вдасться зафарбувати останню рамку. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?



8.8. ***а)*** Доведіть, що для будь-якого натурального числа n існують натуральні числа m,k, які задовольняють рівняння

$$k+m^k+n^{m^k}=2009^n.$$

б) Доведіть, що існує нескінченна кількість натуральних чисел n, для яких така пара m,k єдина.