XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2008

10 клас

Перший день

10.1. Відомо, що $|x+y|+|x-y|=1$. Знайдіть найменше та найбільше значення виразу x^2-6x+y^2-6y.

10.2. На продовженні сторони BC паралелограма $ABCD$ за точку C вибрано таку точку K, що трикутник ΔCDK є рівнобедреним з основою , а на продовженні сторони DC за точку C вибрано таку точку L, що рівнобедреним з основою CL є трикутник CBL. Бісектриси кутів $\angle LBC$ та $\angle CDK$ перетинаються в точці Q. Знайдіть радіус описаного навколо трикутника ALK кола, якщо $\angle BQD=\alpha$ і $KL=a$.

10.3. Розглянемо усі можливі послідовності $a_1, a_2, \dots, a_{2008}$ цілих невід'ємних чисел, такі, що $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_{2008}$, та $a_k \le (k-1)$ для усіх k від 1 до 2008. Доведіть, що таких послідовностей:

а) більше, ніж 2^{2007}; ***б)*** більше, ніж 2^{2008}.

10.4. Розглянемо усі зростаючі геометричні прогресії. Серед них виберемо такі, які мають максимальну кількість M спільних елементів з множиною $A=\{1,2,3,\dots,2008\}$. Знайдіть значення M.

XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2008

10 клас

Другий день

10.5. Відомо, що при деякому натуральному n десятковий запис числа $n^3 + 2009n^2 + 27n$ закінчується на цифрою 3. Знайдіть цифри сотень та десятків цього числа.

10.6. Для клітчатої дошки розміром 10×10 розглядаються усі можливі розфарбування 10 його клітинок, для яких у кожному рядку і кожному стовпчику знаходиться рівно одна пофарбована клітинка. Для кожного розфарбування знаходиться прямокутник найбільшої площі зі сторонами, що йдуть по лініям сітки, і який не містить жодної пофарбованої клітинки. Яке найбільше значення може приймати площа цього прямокутника?

10.7. Для довільних додатних чисел a, b, c, довести нерівність: $\frac{a^2}{bc(a^2+b^2)} + \frac{b^2}{ca(b^2+c^2)} + \frac{c^2}{ab(c^2+a^2)} \geq \frac{9}{2}$, якщо вони задовольняють умову:

а) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$; ***б)*** $ab + bc + ca = 1$.

10.8. Нехай H — точка перетину висот гострокутного трикутника ABC, точки A_1, B_1, C_1 — середини сторін BC, CA і AB відповідно. Нехай A_2 та C_2 — такі точки, що $A_2A \perp AC$ і $A_2C_1 \perp AB$, $C_2C \perp AC$ і $C_2A_1 \perp BC$. Доведіть наступні твердження:

а) середина відрізка BH лежить на прямій A_2C_2;

б) нехай пряма BB_1 перетинає коло, описане навколо трикутника $A_1B_1C_1$, в точках B_1 і B_3, тоді точка B_3 лежить на прямій A_2C_2.