XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2008

9 клас

Перший день

9.1. Відомо, що $x^2+(y-4)^2=1$. Знайдіть найменше та найбільше значення виразу $|x|+|y|$.

9.2. За один крок дозволяється замінити трійку чисел (a, b, c) (порядок яких не суттєвий) на трійку (a_1, b_1, c_1) за наступним правилом:

$$a_1=\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},\ b_1=\sqrt{2c^2+2a^2-b^2},\ c_1=\sqrt{2b^2+2a^2-c^2}.$$

Чи можливо за скінченну кількість кроків з трійки $\{3, \sqrt{19}, \sqrt{22}\}$ одержати:

а) трійку $\left(\sqrt{3^{2007}\cdot 2}, \sqrt{3^{2007}\cdot 4}, \sqrt{3^{2007}\cdot 6}\right)$;

б) трійку $\left(\sqrt{3^{2008}\cdot 4}, \sqrt{3^{2008}\cdot 13}, \sqrt{3^{2008}\cdot 33}\right)$?

9.3. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел a, b, c, виконується нерівність:

$$\frac{a+b}{2b+c}+\frac{b+c}{2c+a}+\frac{c+a}{2a+b}\geq 2.$$

9.4. Коло, вписане в трикутник ABC дотикається до сторін BC, CA і AB в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Через середину відрізку A_1B_1 проведено пряму, перпендикулярну до AB, через середину B_1C_1 — пряму, перпендикулярну до BC, і через середину C_1A_1 — пряму, перпендикулярно до CA. Доведіть, що ці прямі перетинаються в одній точці.

XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2008

9 клас

Другий день

9.5. Відомо, що при деякому натуральному n десятковий запис числа $n^3 + 2009n^2 + 27n$ закінчується на цифрою 3. Знайдіть цифри сотень та десятків цього числа.

9.6. На дошці записано n натуральних чисел. До них можна дописувати лише натуральні числа вигляду $\frac{a+b}{a-b}$, де a і b — раніше записані числа. Виявилось, що, діючи у такий спосіб, на дошці можна отримати будь-яке натуральне. Знайдіть найменше значення n та з'ясуйте, які числа були записані на дошці спочатку (розгляньте всі випадки).

9.7. У гострокутному різносторонньому трикутнику ABC проведено висоту BB_1. На стороні BC вибрано таку точку D, що $\angle BAD = \angle CBB_1$. Відрізки AD і BB_1 перетинаються в точці F. Через точку B, перпендикулярно до сторони AB провели пряму l, яка перетинається з прямою CF в точці K. Доведіть, що пряма DK перетинає відрізок BF у його середині.

9.8. У Петрика є декілька однакових білих квадратиків розміром 4×4 клітинки. Кожну клітинку 1×1 кожного квадратика він фарбує у червоний або синій колір у такий спосіб, щоб у будь-яких двох квадратиків відрізнялися перші, другі, треті й четверті стовпчики відповідно, а також перші, другі, треті й четверті рядки відповідно. Повертати та перегортати квадратики не можна. Яку найбільшу кількість квадратиків таким чином Петрик може зафарбувати?