

XLVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2007

10 клас

Перший день

10.1. При яких дійсних значеннях параметра a нерівність

$$(ax^2 + 4(a+1)x + 4a + 1)((4a+1)x^2 + 4(a+1)x + a) \geq 0$$

виконується при всіх дійсних значеннях x ?

10.2. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BB_1 і CC_1 . На променях BB_1 і CC_1 за точками B_1 і C_1 вибираються точки P і Q відповідно так, що $\angle APC = \angle AQB = 90^\circ$. Радіуси кіл, які вписані в трикутники APC та AQB , рівні. Чи обов'язково трикутник ABC рівнобедрений?

10.3. На клітчастій дошці розміром $n \times n$ двоє гравців по черзі малюють багатокутники (не обов'язково опуклі) одиничної площі з вершинами у вузлах сітки. Забороняється малювати багатокутник, який має спільні точки з вже намальованими. Програє той, хто не може намалювати черговий багатокутник. Хто виграє у цій грі?

10.4. Знайдіть усі функції $f : X \rightarrow R$, які для будь-яких чисел $x, y \in X$ задовольняють рівняння:

$$f(x+y) + f(xy-1) = (f(x)+1)(f(y)+1),$$

якщо множина X є множиною:

- а)** цілих чисел;
- б)** раціональних чисел.

XLVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2007

10 клас

Другий день

10.5. Розв'яжіть нерівність:

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{x^2+1}{x} \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \geq 0.$$

10.6. У країні Карнавалії 669 міст, деякі з яких з'єднані дорогами з одностороннім рухом. Кожний день у довільних двох містах проводять карнавал, на час якого всі дороги, що входять і виходять з цих міст, перекиваються. Але схема доріг в Карнавалії влаштована так, що мешканці інших 667 міст можуть проїхати з будь-якого одного міста в будь-яке інше скориставшись однією або декількома дорогами, не порушуючи правил руху. Яка найменша кількість доріг може бути в Карнавалії?

10.7. В гострокутному трикутнику ABC кут ABC дорівнює 60° . Точка D належить стороні AC . Доведіть нерівність:

$$\sqrt{3}BD \leq AC + \max\{AD, DC\}.$$

10.8. Доведіть, що для довільних різних простих чисел p і q рівняння

$$x(x+1) = pq(x-y)$$

а) має рівно два розв'язки в натуральних числах (x, y) ;

б) в обох розв'язках значення y однакове.