XLVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2007

8 клас

Перший день

8.1. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+3|=1, \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+3|=1. \end{cases}$

8.2. На шахівниці 8×8 в лівому нижньому куті стоїть тура. Двоє гравців ходять по черзі. Перший за один хід пересуває туру на будь-яку кількість клітинок по вертикалі вгору чи вниз, а другий – по горизонталі вправо чи вліво. Якщо під час гри тура перетнула клітину (зупинялась на ній або проходила вздовж), то ще раз перетинати таку клітину забороняється. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто виграє у цій грі?

8.3. У рівнобедреному трикутнику ABC $(AB=BC)$ $\angle ABC=40°$. На сторонах AB і BC вибрані точки M і N відповідно. Виявилось, що відрізок MN перпендикулярний до сторони BC і дорівнює половині сторони AC. Доведіть, що $CM=AC$.

8.4. Позначимо через $\tau(n)$ кількість натуральних дільників числа n. Знайдіть усі пари натуральних чисел (n,m), які задовольняють рівняння:

$$\tau^2(m)+\tau^2(n+15)+1=3\tau^2\left(n^2+3n\right).$$

XLVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2007

8 клас

Другий день

8.5. Знайти усі пари цілих чисел (n, m), які задовольняють рівняння:

$$n^3 + 7m^2 = 2007.$$

8.6. Чи можуть при деякому дійсному значенні x одночасно бути раціональними числа $\left(x - \sqrt{3}\right)$ та $\left(x^3 + \sqrt{3}\right)$?

8.7. Упорядковану пару чисел (a, b) дозволяється замінити на одну з таких чотирьох пар: $\left(a \pm \frac{2}{b}, b\right)$ при $b \neq 0$, $\left(a, b \pm \frac{2}{a}\right)$ при $a \neq 0$.

а) Отримайте за допомогою цих операцій з пари $(2007\ ,\ 2)$ пару $(2\ ,\ -2007)$.

б) Доведіть, що при будь-якому способі отримання з пари $(2007\ ,\ 2)$ пари $(2\ ,\ -2007)$ в деякий момент було отримано пару з однією нульовою компонентою.

8.8. На кожній стороні трикутника ABC у зовнішній бік побудовано рівносторонні трикутники: ABC_1, AB_1C і A_1BC. Через середини відрізків A_1B_1, B_1C_1 і C_1A_1 провели прямі, перпендикулярні сторонам AB, BC і AC відповідно. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.