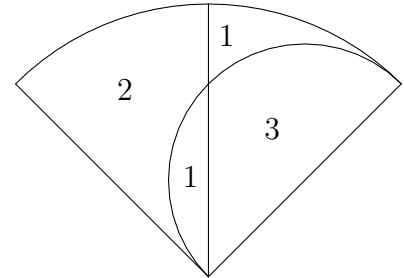


# Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2016 г., 11 класс

1. Баба Яга полетела на метле от избушки к Лысой горе. В полночь на расстоянии 100 км от избушки она пересела в ступу. За 50 км до Лысой горы ступа сломалась, и Бабе Яге пришлось снова лететь на метле. В результате она оказалась на Лысой горе в 2 часа ночи. За сколько времени Баба Яга долетит на метле обратно, если на метле она летит втрое медленнее, чем в ступе?

2. Сэр Артур заказал художнику рисунок для своего щита, имеющего форму четверти круга, и попросил раскрасить его в три цвета: желтый – цвет щедрости, красный – храбрости и черный – мудрости. Когда художник принес раскрашенный щит, то Артуру показалось, что на рисунке храбрости больше, чем мудрости. Докажите, что Артур ошибся. *Желтым цветом покрашены области, отмеченные на рисунке цифрой 1, красным цветом – цифрой 2, черным цветом – цифрой 3.*



3. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$1 + \sin^2 ax = \cos x$$

имеет единственное решение?

4. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Точки  $P$  и  $Q$  – основания перпендикуляров, опущенных из точки  $A$  на прямые  $BC$  и  $CD$  соответственно. Точки  $R$  и  $T$  – основания перпендикуляров, опущенных из точки  $D$  на прямые  $AB$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что точки  $P, Q, R, T$  лежат на одной окружности.

5. На доске записаны три натуральных числа, сумма которых равна  $S$ . Каждую минуту тройка  $a, b, c$  заменяется на тройку  $\frac{b^2 + c^2}{a}, \frac{a^2 + c^2}{b}, \frac{a^2 + b^2}{c}$ . Через пять минут сумма трех чисел на доске оказалась равна 2016. Какое наибольшее значение могла иметь исходная сумма  $S$ ?

6. 100 участников олимпиады выстроились в шеренгу. Все они решили разные наборы задач. У любых двух стоящих рядом участников нет общей решенной задачи, зато есть общая нерешенная. Докажите, что на олимпиаде было предложено не менее восьми задач.