

Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2016 г., 10 класс

1. На школьном субботнике Леша и Гриша получили задание подмести асфальтовую дорожку. Они начали мести с разных концов дорожки, двигаясь навстречу друг другу. Гриша подметал в два раза быстрее, чем Леша, но каждый раз, подметая 10 метров, отдыхал 20 минут. Леша же подметал без перерывов. Через 2 часа после начала работы Леша добрался до середины дорожки и обнаружил там Гришу, который как раз закончил подметать очередные 10 метров. Чему равна длина дорожки?

2. Решите уравнение: $\frac{4 \sin x}{(x-3)^2} + |\sin x| = 0$.

3. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ на прямой AF выбрана точка P так, что $\angle PCD = 45^\circ$. Найдите величину угла FPE .

4. Докажите, что если $a^2 < 4bc$, $b^2 < 4ac$, $c^2 < 4ab$, то $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ac$.

5. Дано натуральное число n . Известно, что все его натуральные делители можно разбить на пары таким образом, что сумма чисел в каждой паре является простым числом. Докажите, что все эти суммы попарно различны и не одна из них не является делителем числа n .

6. Старуха Шапокляк намазала клеем 31 клетку шахматной доски. Докажите, что Крокодил Гена сможет поставить на чистые клетки пять ладей, которые не бьют друг друга.