

**Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 11 класс. 2 тур**

1. Решите систему 
$$\begin{cases} x \cdot \sqrt{1 - y^2} = \frac{1}{4} (\sqrt{3} + 1), \\ y \cdot \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{4} (\sqrt{3} - 1). \end{cases}$$

2. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  на основании  $BC$  выбрана точка  $D$ , а на боковых сторонах  $AB$  и  $AC$  – точки  $F$  и  $E$  соответственно. Оказалось, что  $BE = BF$ , а  $ED$  – биссектриса угла  $BEC$ . Докажите, что  $BD = EF$  тогда и только тогда, когда  $AF = EC$ .

3. Первые  $k$  членов  $a_1, a_2, \dots, a_k$  последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  – различные натуральные числа, а при  $n > k$  член  $a_n$  – наименьшее натуральное число, не представимое в виде суммы нескольких (возможно, одного) предыдущих членов последовательности. Докажите, что  $a_n = 2a_{n-1}$  при всех достаточно больших  $n$ .

4. На стене в ряд расположены  $2n - 1$  выключателей. В начале центральный ( $n$ -й выключатель) включен, а остальные выключены. За один шаг можно выбрать несколько (по крайней мере 3) выключателя, идущих подряд, таких, что крайние выбранные выключатели выключены, а все остальные включены, и переключить каждый из них. Какое наибольшее количество шагов можно сделать?