

## Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 10 класс. 2 тур

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $CH$ . Точка  $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $BHC$ . Докажите, что угол  $AIC$  прямой тогда и только тогда, когда  $AB = BC$ .

2. *Пьяный король* – это фигура, которая может из любой клетки  $A$  доски качнуться в любую из клеток, расположенных внутри квадрата  $19 \times 19$  с центром в клетке  $A$ , кроме тех клеток, которые находятся с  $A$  одной строке или одном столбце. Какое наибольшее число пьяных королей, не бьющих друг друга, может поместиться на доске  $1000 \times 1000$ ?

3. Найдите все функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для которых при всех действительных  $x$  и  $y$  выполнено равенство:

$$f(x+y)f(xy) = f(x^2 - y^2 + 1).$$

4. Число  $(p-1)^p + 1$ , где  $p > 2$  – простое число, разложили на простые множители. Докажите, что сумма этих множителей больше  $p^2/2$  (каждый простой множитель считается столько раз, сколько он входит в разложение).