

## Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 10 класс. 1 тур

1. Найдите все пары натуральных чисел  $(a, b)$  для которых число  $a^{2018} + b$  делится на  $ab$ .
2. Положительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют условию  $a + b + c = 1$ . Докажите, что

$$(a + 1)\sqrt{2a(1 - a)} + (b + 1)\sqrt{2b(1 - b)} + (c + 1)\sqrt{2c(1 - c)} \geq 8(ab + bc + ac).$$

3. В некоторой стране 2017 городов. Между некоторыми из них осуществляются двусторонние авиаперелеты. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого. Министерство обороны хочет выбрать несколько городов и назвать их стратегически важными таким образом, чтобы от любого из городов страны существовал прямой авиаперелет до некоторого стратегически важного. Какого минимального количества стратегически важных городов гарантировано хватит министерству обороны?
4. В треугольнике  $ABC$  выполнено неравенство  $AB < AC$ . Биссектриса угла  $BAC$  треугольника пересекает его описанную окружность в точке  $D$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $AC$  пересекает биссектрису внешнего угла при вершине  $A$  треугольника  $ABC$  в точке  $Z$ . Докажите, что середина отрезка  $AB$  лежит на описанной окружности треугольника  $ADZ$ .