# Областная олимпиада юных математиков, 11 класс, 2018 г.

## I тур

**1.** Чи існує таке значення $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, для якого числа $\sin x$, $\cos x$ та $\operatorname{tg} x$ утворюють геометричну прогресію?

**2.** Знайдіть пари натуральних чисел $x$, $y$, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} \text{НСК}(x,y) + \text{НСД}(x,y) = 2018, \\ x + y = 2018. \end{cases}$$

**3.** Для яких натуральних $n$ квадрат $n \times n$ можна повністю покрити без накладання деякою кількістю прямокутників $k \times 1$ та одним квадратиком $1 \times 1$, де а) $k = 4$; б) $k = 8$?

**4.** Дано нерівнобедрений трикутник $ABC$, у якого $2AC = AB + BC$. Позначимо через $I$ – центр вписаного в нього кола, $K$ – середину дуги $ABC$ описаного кола. Нехай $T$ – така точка на прямій $AC$, що $\angle TIB = 90°$. Доведіть, що пряма $TB$ дотикається до описаного кола трикутника $KBI$.

**5.** Для додатних чисел $x$, $y$, $z$ доведіть нерівність:

$$2 \cdot \left(\frac{x}{2x+y}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{y}{2y+z}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{z}{2z+x}\right)^2 + \frac{9xyz}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)} \leqslant 1.$$

## II тур

**1.** Даны ненулевые числа $a$, $b$, $c$. Известно, что уравнение $ax + \frac{c}{x} = b$ имеет решение. Докажите, что тогда решение будет иметь и одно из уравнений: $ax + \frac{c}{x} = b + 1$ и $ax + \frac{c}{x} = b - 1$.

**2.** Остроугольный треугольник $ABC$, стороны которого удовлетворяют соотношению $AB < AC < BC$, вписан в окружность $\omega$. Окружность $\omega_1$ с центром в точке $A$ и радиусом $AC$ пересекает окружность $\omega$ в точке $D$, а продолжение стороны $BC$ – в точке $E$. Прямая $AE$ пересекает окружность $\omega$ в точке $F$. Точка $G$ симметрична точке $E$ относительно $B$. Докажите, что около четырёхугольника $EFGD$ можно описать окружность.

**3.** Между некоторыми городами небольшой, но гордой страны осуществляются двусторонние беспосадочные авиарейсы. Известно, что для любой пары городов существует маршрут из одного города в другой, состоящий из не более чем 100 перелётов. Известно также, что для любых двух городов можно добраться от одного до другого по маршруту, состоящему из чётного числа перелётов. Найдите наименьшее натуральное число $n$ такое, что для любых двух городов можно наверняка долететь из одного в другой по маршруту, состоящему из чётного числа перелётов, не превосходящего $n$. *(В маршруте некоторые города и перелёты могут встречаться более одного раза).*

**4.** Какое наибольшее количество натуральных чисел можно выбрать таким образом, что ни одно из чисел не делится на другое, но среди любых трёх найдётся число, на которое делится сумма двух оставшихся?