

Олимпиада по математике ХФМЛ 27, 2017 г., 9 класс

1. Дано 27 чисел. Известно, что произведение всех этих чисел, а также любых четырех из них – положительно. Докажите, что каждое из чисел положительно.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$|x - y| < 1 - 2x + 2y.$$

3. Известно, что положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $abc = 1$. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{1 + a + ab} + \frac{1}{1 + b + bc} + \frac{1}{1 + c + ca}.$$

4. Дан треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$. На гипотенузе AB выбраны точки D и E такие, что $AD = AC$ и $BE = BC$. Точки P и Q , лежащие на отрезках AC и BC соответственно, таковы, что $AP = AE$ и $BQ = BD$. Точка M – середина отрезка PQ . Докажите, что M является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC .

5. Пусть n – натуральное число. Докажите, что если $n^5 + n^4 + 1$ имеет ровно 6 натуральных делителей, то $n^3 - n + 1$ – точный квадрат.

6. В стране 1000 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Известно, что из любого города в любой другой можно добраться по дорогам. Для какого наименьшего k верно следующее утверждение: в любой такой стране можно назначить некоторые k городов *центральными* так, что любой не центральный город будет соединен дорогой хотя бы с одним центральным?