

## Олимпиада по математике ХФМЛ 27, 2017 г., 10 класс

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y \leq x^2y.$$

2. Есть несколько труб, заливающих воду в бассейн с одинаковой скоростью. Бассейн каждый день наполняется заново. В понедельник несколько труб наполнили бассейн. Во вторник подключили на одну трубу больше, в результате чего бассейн наполнился на 20 минут быстрее. В среду подключили еще на 4 трубы больше, и бассейн наполнился еще на 40 минут быстрее. Сколько труб работало в первый день?

3. Точки  $A$  и  $B$  расположены на единичном расстоянии друг от друга. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  единичного радиуса с центрами в  $A$  и  $B$  соответственно пересекаются в точках  $C$  и  $D$ . Окружность с центром  $C$ , проходящая через точку  $D$ , пересекает луч  $CA$  в точке  $F$ . Луч  $DF$  пересекает окружность  $\omega_1$  в точке  $P$ . Найдите угол  $APB$ .

4. В классе учатся  $n$  девочек. Каждая из них придумала свою сплетню, причем все сплетни разные. Они начинают посылать друг другу SMS-сообщения. В сообщении девочка передает все сплетни, которые знает (свою собственную и те, которые уже узнала). Докажите, что потребуется не менее  $2n - 2$  SMS-сообщений, чтобы все девочки ознакомились со всеми сплетнями.

5. Дано три отрезка, длины которых равны 1 см, 2 см, 3 см. Отрезок длины 3 см разбили на  $n > 1$  других отрезков. Докажите, что среди получившихся  $n + 2$  отрезков найдутся три, из которых можно сложить треугольник.

6. Существуют ли такие различные натуральные числа  $a$ ,  $b$  и натуральное число  $n$ , что

$$\text{НОК}(a + n, b) = \text{НОК}(a, b + n)?$$