## XXII Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5–12”

В олімпіаді може взяти участь кожен учень 5 – 12 класів. Наполегливо радимо потренуватися та випробувати свої здібності всім претендентам на участь в обласних та Всеукраїнській олімпіадах, а також відбіркових змаганнях на Міжнародну математичну олімпіаду.

Розв'язання задач слід надсилати до 1 березня 2018 року (за поштовим штемпелем) на адресу


`01601 МСП, Київ,`<br>
`Київський національний університет ім. Тараса Шевченка`<br>
`механіко-математичний факультет`<br>
`кафедра математичного аналізу`<br>
`‘‘Олімпіада 5-12’’`

або у відсканованому вигляді на електронну адресу `olymp5-12@ukr.net`.


Підсумки олімпіади буде підведено наприкінці березня на сайті

`http://www.mechmat.univ.kiev.ua`.

# Умови задач

**1.** Шоколадна плитка розміру $5 \times 12$ складається з 30 чорних та 30 молочних шматочків (не обов'язково розташованих у шаховому порядку). Чи будь-яку таку плитку можна розламати на три прямокутники так, щоб або у кожному прямокутнику була парна кількість чорних шматочків, або у кожному прямокутнику була парна кількість молочних шматочків?

**2.** Знайти найбільше натуральне число, в якому всі цифри різні та кожні дві сусідні цифри утворюють число, яке ділиться на 3.

**3.** У зоопарку кожен п'ятий учасник групової екскурсії отримує квиток безплатно. Якщо хлопці та дівчата з одного класу підуть на екскурсію окремо, то хлопці сплатять за квитки 360 гривень, а дівчата 480 гривень, а якщо вони підуть на екскурсію разом, то сплатять за квитки 810 гривень. Скільки хлопців та скільки дівчат у класі?

**4.** Чи існують різні прості числа $p, q, r$ такі, що кожне з чисел $\frac{p+q}{2}$, $\frac{p+r}{2}$, $\frac{q+r}{2}$ та $\frac{p+q+r}{3}$ є простим?

**5.** У селищі Вухатому мешкають кролі. Відомо, що серед них понад $2/3$ — білі, понад $1/5$ — сірі та понад $1/8$ — руді. При якій найменшій кількості кролів це можливо?

**6.** На дошці написані числа $1, 2, 3, \ldots, 100$. За один крок дозволяється обрати будь-яке натуральне число $k$ та збільшити на 1 всі числа на дошці, які діляться на $k$. Після якої найменшої кількості кроків усі числа на дошці можуть стати рівними?

**7.** Для довільних $a, b \geq 0$ довести нерівність

$$8(a+b)(a^3+b^3) \leq 9(a^2+b^2)^2.$$

**8.** На середній лінії рівнобедреної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) знайти точку $K$, для якої сума кутів $\angle DAK + \angle BCK$ буде найменшою.

**9.** Двоє гравців по черзі фарбують клітинки таблиці розміру $10 \times 10$. Гра завершується, коли у кожному квадраті розміру $3 \times 3$ з'являється принаймні по одній пофарбованій клітинці. Перемагає гравець, який зробив останній хід. Хто з гравців має виграшну стратегію?

**10.** Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+2}{(x-y)(y-z)(z-x)+x} = 2x+1, \\ \dfrac{y^2+2}{(x-y)(y-z)(z-x)+y} = 2y+1, \\ \dfrac{z^2+2}{(x-y)(y-z)(z-x)+z} = 2z+1. \end{cases}$$

**11.** Всередині паралелограма $ABCD$ обрали точку $P$ так, що

$$\angle APB + \angle CPD = \angle BPC + \angle APD.$$

Довести, що існує коло, яке дотикається до кожного з кіл, описаних навколо трикутників $APB$, $BPC$, $CPD$ та $APD$.

**12.** Знайти всі трійки натуральних чисел $a < b < c$ такі, що при кожному натуральному $n$ число $(n+a)(n+b)(n+c)$ ділиться на $abc$.