

10 класс

1. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} a^3 + b = 4c, \\ a + b^3 = c, \\ ab = -1. \end{cases}$$

2. Натуральные числа a, b, c, p, q, r таковы, что $\frac{a+c+abc}{bc+1} = \frac{p+r+pqr}{qr+1}$. Докажите, что это возможно только в случае, когда $a = p, b = q$ и $c = r$.

3. На электрическом щитке расположено несколько лампочек. Некоторые пары лампочек соединены друг с другом проводом (один провод соединяет между собой две лампочки). Каждая лампочка может гореть либо синим, либо желтым цветом. Раз в минуту электрик нажимает на переключатель. При нажатии на переключатель все лампочки, соединенные с лампочкой другого цвета, меняют свой цвет. Докажите, что после нескольких переключений все лампочки будут иметь тот же цвет, что и две минуты назад.

4. В четырехугольнике $ABCD$ угол при вершине A – прямой. Точка M – середина стороны BC . Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

5. Найдите все пары простых чисел (p, q) , такие что $p^3 + q^3 - p$ делится на $p^2 + pq + q^2$.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

На выполнение заданий отводится 3,5 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 23 октября).

Апелляция состоится 24 октября с 13³⁰ до 15⁰⁰ в ауд. 6-52.

Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресу sites.google.com/site/kharkivolimp/

10 клас

1. Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} a^3 + b = 4c, \\ a + b^3 = c, \\ ab = -1. \end{cases}$$

2. Натуральні числа a, b, c, p, q, r є такими, що $\frac{a+c+abc}{bc+1} = \frac{p+r+pqr}{qr+1}$. Доведіть, що це можливо тільки у випадку, коли $a = p, b = q$ и $c = r$.

3. На електричному щитку розташовано декілька лампочок. Деякі пари лампочок з'єднані одна з одною дротом (один дріт з'єднує між собою дві лампочки). Кожна лампочка може горіти або синім, або жовтим кольором. Раз на хвилину електрик натискає на перемикач. При натисканні на перемикач усі лампочки, які з'єднані з лампочкою іншого кольору, змінюють свій колір. Доведіть, що після декількох перемикань усі лампочки будуть мати той самий колір, що й дві хвилини тому.

4. У чотирикутнику $ABCD$ кут при вершині A – прямий. Точка M – середина сторони BC . Виявилось, що $\angle ADC = \angle BAM$. Доведіть, що $\angle ADB = \angle CAM$.

5. Знайдіть усі пари простих чисел (p, q) , таких що $p^3 + q^3 - p$ ділиться на $p^2 + pq + q^2$.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 3,5 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 23 жовтня).

Апелляція відбудеться 24 жовтня з 13³⁰ до 15⁰⁰ в ауд. 6-52.

Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресою sites.google.com/site/kharkivolimp/