

11 класс

1. В физико-математической школе все ученики сидят за партами по двое. Известно, что у 60% мальчиков сосед по парте мальчик, а у 20% девочек – девочка. Какую часть всех учеников школы составляют девочки? Ответ обоснуйте.
2. Числа x , y и z таковы, что выполнены равенства

$$x(x - 1) + 2yz = y(y - 1) + 2xz = z(z - 1) + 2xy.$$

Какие значения может принимать величина $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2$? Ответ обоснуйте.

3. Может ли натуральное число делиться на все числа от 1 до 2013, кроме каких-то двух последовательных? Ответ обоснуйте.
4. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . На стороне AB выбраны точки M и K так, что $B_1K \parallel BC$ и $A_1M \parallel AC$. Докажите, что угол AA_1K равен углу BB_1M .
5. Даны n натуральных чисел, каждое из которых не превосходит m , и m натуральных чисел, каждое из которых не превосходит n . Докажите, что можно выбрать группу чисел из первого множества и группу чисел из второго множества так, что в этих группах суммы чисел будут равны.