

9 класс

1. Поливальная машина движется с постоянной скоростью, и каждую минуту из неё вытекает одно и то же количество воды. Если бы скорость движения увеличилась в 2 раза, а скорость вытекания воды увеличилась бы в 3 раза, то содержащейся в машине воды хватило бы на то, чтобы полить 4 км дороги. Сколько километров дороги удастся полить, если скорость движения увеличить в 3 раза, а скорость вытекания воды увеличить в 2 раза? Ответ обоснуйте.
2. Можно ли расставить по кругу 2014 натуральных чисел так, чтобы каждое число равнялось либо сумме, либо разности двух соседних чисел? Ответ обоснуйте.
3. Даны числа a_1, a_2, \dots, a_{10} . Известно, что каждое из десяти квадратных уравнений

$$x^2 - a_1x + a_2 = 0, x^2 - a_2x + a_3 = 0, \dots, x^2 - a_9x + a_{10} = 0, x^2 - a_{10}x + a_1 = 0$$

имеет не больше одного решения. Докажите, что все числа a_1, a_2, \dots, a_{10} не превосходят 4.

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D такая, что $AC = CD$. На дуге BC описанной окружности треугольника BDC (не содержащей точки D) выбрана точка E , для которой $\angle ACB = \angle ABE$. На продолжении отрезка BC за точку C отмечена точка F такая, что $CE = CF$. Докажите, что $AB = AF$.

5. У алхимика Вальтера есть 15 мер ртути и 10 мер серы. Он может проводить алхимические реакции трёх типов. Может соединить одну меру ртути и одну меру любого другого вещества при низкой температуре, и тогда получится три меры этого вещества. Может соединить меру серы и меру ртути при высокой температуре, и получится мера кислоты. Наконец, может соединить меру серы и меру кислоты (при любой температуре), и получится мера ртути. Для приготовления меры философского зелья алхимику необходимо взять 1 меру ртути, 2 меры серы и 3 меры кислоты. Какое наибольшее количество мер философского зелья сможет приготовить Вальтер? Ответ обоснуйте.