

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2017 год. 11 класс. 3 тур

1. В остроугольном треугольнике ABC точка M – середина стороны BC , а точка H – основание высоты, проведенной из вершины B . К прямой AM проведен перпендикуляр через точку M , который пересекает луч HV в точке P . Оказалось, что $\angle CAM = 30^\circ$. Докажите, что $CB = PA$.

2. Группа туристов заказала p автобусов, чтобы добраться до старинной крепости. На обратный путь они заказали q автобусов, причем $q < p$. Известно, что в каждом из автобусов ехал хотя бы один человек. Докажите, что найдутся по крайней мере $p - q + 1$ таких туристов, что каждый из них на обратном пути ехал в автобусе, в котором было больше людей, чем в автобусе, в котором он ехал в крепость.

3. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ – натуральные числа. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{\text{НОК}(a_1, a_2)} + \dots + \frac{1}{\text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_n)} < 2.$$

4. Найдите все ограниченные сверху функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство:

$$f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy).$$