

## Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2016 год. 9 класс. 3 тур

1. Угол  $A$  треугольника  $ABC$  вдвое больше угла  $B$ , а  $AK$  – биссектриса треугольника. Точка  $P$  – середина стороны  $AB$ . Точка  $Q$  – основание перпендикуляра, опущенного из  $P$  на прямую  $AK$ . Точка  $T$  на стороне  $BC$  такова, что треугольник  $PQT$  – равносторонний. Докажите, что точки  $C$ ,  $Q$  и  $P$  лежат на одной прямой.

2. Рассмотрим последовательность натуральных чисел  $\{p_n\}$ , которая определяется следующим образом:  $p_1 = 2$ , а  $p_{n+1}$  – это наименьший простой делитель числа  $np_1^{1!}p_2^{2!} \dots p_n^{n!} + 1$ , при  $n \geq 1$ . Докажите, что в последовательности  $\{p_n\}$  содержатся все простые числа.

3. Найдите все тройки действительных чисел  $(x, y, z)$ , для которых выполнены равенства

$$x(y + z - x^3) = y(z + x - y^3) = z(x + y - z^3) = 1.$$

4. Во дворе дома стоит  $n$  столбов. Некоторые из них соединены проводами, причем известно, что можно пустить ток по проводам между любыми двумя столбами. Всего натянута  $k$  проводов. В доме поселился сумасшедший электрик. Каждую ночь он выходит во двор, подходит к какому-то столбу и с каждым проводом, идущим от этого столба, делает следующее: обрезает его, если он целый, или чинит, если провод обрезан. Изначально все провода были целыми. Найдите все пары натуральных чисел  $(n, k)$  при которых:

а) для любого начального расположения проводов электрик сможет гарантированно добиться того, что все провода во дворе окажутся обрезаны;

б) провода изначально могли быть протянуты таким образом, что электрик сможет добиться того, что все провода во дворе окажутся обрезаны и он сможет сдать их на металлолом.