Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2017 год. 11 класс. 2 тур

1. Какое наибольшее количество целочисленных точек пространства можно покрасить в красный цвет так, чтобы ни один из отрезков с концами в красных точках не содержал двух других (не обязательно красных) целочисленных точек?

2. Найдите все натуральные n для которых неравенство $3x^n + n(x+2) - 3 \geqslant nx^2$ выполнено при всех действительных значениях x.

3. Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$, свободного от квадратов, существуют такое простое число p и целое m, что выполнены условия: $n \,\vdots\, p$ и $(p^2 + p \cdot m^p) \,\vdots\, n$.

4. Из точки A, лежащей вне окружности ω, проведены касательные AT и AS к этой окружности. Точки X и Y – середины отрезков AT и AS соответственно. Касательная, проведенная из точки X к ω, касается окружности в точке R, отличной от T. Точки P и Q – середины отрезков XT и XR. Прямые XY и PQ пересекаются в точке K. Прямые SX и TK пересекаются в точке L. Докажите, что точки K, R, L, Q лежат на одной окружности.