

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2017 год. 10 класс. 2 тур

1. Найдите все тройки действительных чисел a, b, c , удовлетворяющие неравенству

$$2a\sqrt{b-1} + 2b\sqrt{c-1} + 2c\sqrt{a-1} \geq ab + bc + ca.$$

2. Пусть n – натуральное число, большее 4. В клетках таблицы $n \times n$ изначально стоят нули. За один ход в таблице можно выбрать квадрат $(n-1) \times (n-1)$, а затем для каждого из чисел, записанных в клетках выбранного квадрата, либо прибавить к нему единицу, либо вычесть из него единицу. При каких n за несколько таких ходов можно получить таблицу, в которой встречаются все натуральные числа от 1 до n^2 ?

3. Найдите все такие функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что для любых натуральных чисел a, b и c , удовлетворяющих условию $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, выполнено равенство $\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{f(c)}$.

4. В треугольнике ABC высота, проведенная из вершины C , и касательная к описанной окружности, проведенная через точку A , пересекаются в точке P . Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке D . Прямые PD и AB пересекаются в точке K . Точка H – ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что $HK \perp AD$.