

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2016 год. 10 класс. 2 тур

1. Число 125 записано в виде суммы нескольких попарно различных взаимно простых чисел больших единицы. Каково наибольшее возможное количество записанных слагаемых?
2. В женском клубе состоят 100 леди. Каждая из них в течение года пила чай ровно с 56 другими леди из этого клуба. В клубе есть совет, куда входят 50 наиболее уважаемых леди. Известно, что любые две леди, состоящие в совете, пили друг с другом чай. Докажите, что всех леди в клубе можно разделить на две группы таким образом, что любые две леди из одной группы пили друг с другом чай.
3. Дан выпуклый четырехугольник $PRST$, в котором $\angle TPR = 90^\circ$. Пусть Q – середина стороны RS . Оказалось, что $\angle PTS = \angle RPQ$. Докажите, что $\angle PTR = \angle SPQ$.
4. Сумма положительных чисел a , b и c равна 3. Докажите, что

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$