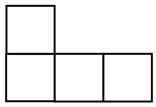
## *Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики*
## *2015 рік. 11 клас. 2 тур*

***1.*** Дійсні числа $x, y, z$ такі, що $x < y < z < 6$. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y-x} + \dfrac{1}{z-y} \le 2, \\ \dfrac{1}{6-z} + 2 \le x. \end{cases}$$



**2.** Для яких натуральних $n$ квадрат $n \times n$ можна покрити $L$-тетраміно (рис.) можливо у декілька шарів? Покрити у декілька шарів у даному випадку означає, що кожна комірка $1\times1$ покрита однаковою кількістю тетраміно, які можна повертати та перегортати у будь-якому напрямі. Жодна фігурка не повинна виходити за межі дошки.

**3.** На площині дано два кола $w_1$ та $w_2$ з центрами $O_1$ та $O_2$ відповідно дотикаються зовнішнім чином у точці $M$, при цьому радіус кола $w_2$ більший за радіус кола $w_1$. Розглянемо точку $A \in w_2$ таку, що точки $O_1$, $O_2$ та $A$ не колінеарні. $AB$ та $AC$ – дотичні до кола $w_1$ ($B$ та $C$ є точками дотику). Лінії $MB$ і $MC$ перетинають вдруге коло $w_2$ у точках $E$ і $F$ відповідно. Точка перетину $EF$ і дотичної в точці $A$ до кола $w_2$ позначимо через $D$ Доведіть, що точка $D$ лежить на фіксованій прямій, коли точка $A$ рухається по колу $w_2$ таким чином, що точки $O_1$, $O_2$ та $A$ не колінеарні.

**4.** Послідовність $(a_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ задана умовами $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, та $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n a_{n-1} + a_n + a_{n-1}$ для усіх натуральних $n$. Знайдіть усі прості числа $p$ для яких існує натуральне $m$ таке, що $p$ ділить число $a_m - 1$.

*На виконання завдання відводиться 4 години*
*Кожна задача оцінюється в 7 балів* 22 лютого 2015 року