

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2013 год. 9 класс. 2 тур

1. Найдите наименьшее значение выражения $(x + y)(x + z)$, где x , y и z – положительные числа, удовлетворяющие равенству

$$xyz(x + y + z) = 1.$$

2. В стране 10 городов, некоторые из которых соединены прямыми дорогами. Оказалось, что любые четыре города можно объехать в некотором порядке, проехав ровно по трем дорогам. Какое наименьшее число дорог может быть в такой стране?

3. Точки M и N выбраны на биссектрисе AL таким образом, что $\angle ABM = \angle ACN = \varphi$. Точка X лежит внутри треугольника ABC на серединном перпендикуляре к BC и $\angle BXC = 2\angle BML$. Найдите угол MXN .

4. Найдите все такие многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами, что для любого простого p и любых натуральных u и v , для которых $uv - 1$ делится на p , число $f(u)f(v) - 1$ тоже делится на p .