Відбір команди України на 56-ту міжнародну математичну олімпіаду, 2015

I тур

1. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC, A' — точка, що симетрична A відносно прямої BC, X — довільна точка на промені AA' ($X \neq A$). Бісектриса кута BAC перетинає описане коло трикутника ABC в точці D ($D \neq A$). Нехай M — середина відрізка DX. Пряма, що проходить через точку O паралельно до AD, перетинає DX в точці N. Доведіть, що кути BAM і CAN рівні.

2. У футбольному турнірі n команд грають в одне коло ($n \vdots 2$). У кожному турі повинні грати $n/2$ пар команд, які ще не грали між собою. Розклад кожного туру складається напередодні його проведення. Для якого найменшого натурального k можлива така ситуація: після проведення k турів скласти розклад $k+1$-го туру вже не можливо, тобто ці n команд неможна розбити на $n/2$ пар, у кожній з яких зустрічаються команди, що ще не грали у попередніх k турах?

3. Знайдіть всі трійки (p,x,y), які складаються з простого числа p і натуральних x та y такі, що числа $x^{p-1}+y$ і $x+y^{p-1}$ є степенями числа p.