

Відбір команди України на 55-ту міжнародну математичну олімпіаду, 2014

I тур

*В давнину люди вчилися для того, щоб удосконалюватися.
Нині вчать для того, щоб здивувати інших.
Конфуцій*

1. Задано натуральне число $n \geq 2$ і правильний $2n$ -кутник в кожній вершині якого сидить по мураші. В деякі моменти часу, кожна мураха переповзає у одну з двох сусідніх вершин (в деяких вершинах може опинитись одночасно декілька мурах). Через k таких операцій виявилось, що довільна пряма, яка сполучає дві різні вершини многокутника в яких є мурахи, не проходить через його центр. Для заданого n знайдіть найменше можливе значення k .

2. Для додатних чисел x_1, x_2, \dots, x_n , добуток яких дорівнює 1, позначимо через $S = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$. Знайдіть максимальне значення виразу:

$$\frac{x_1}{S - x_1^3 + x_1^2} + \frac{x_2}{S - x_2^3 + x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{S - x_n^3 + x_n^2}.$$

3. Задано випуклий шестикутник $ABCDEF$ у якому $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$ і $\angle A - \angle D = \angle C - \angle F = \angle E - \angle B$. Доведіть, що діагоналі AD , BE і CF перетинаються в одній точці.