

# Відбір команди України на 55-ту міжнародну математичну олімпіаду, 2014

## IV тур

*Той, у кого є уява, але немає знань,  
має крила, але немає ніг.  
Жозеф Жубер*

**10.** Знайдіть всі натуральні числа  $n \geq 4$ , для яких існують  $n$  точок загального положення на площині таких, що довільний трикутник з вершинами, які належать випуклій оболонці цих  $n$  точок, містить всередині рівно одну з  $n-3$  точок, що залишилися.

**11.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , які задовольняють умову

$$(f(x) - f(y))(u - v) = (f(u) - f(v))(x - y)$$

для довільних дійсних  $x, y, u, v$  таких, що  $x + y = u + v$ .

**12.** Доведіть, що для довільного простого  $p \geq 3$  кількість натуральних чисел  $n$ , для яких  $p \mid n! + 1$ , не перевищує  $cp^{2/3}$ , де  $c$  – константа, яка не залежить від  $p$ .