

Відбір команди України на 55-ту міжнародну математичну олімпіаду, 2014

II тур

*Знання без доказів породжує віру,
а знання з доказами – сумнів.*

4. Зовнівписане коло різностороннього трикутника ABC дотикається до сторони BC в точці K . Описані кола трикутників AKB і AKC вдруге перетинають бісектрису кута A в точках X та Y . Нехай M - середина сторони BC . Доведіть, що центр описаного кола трикутника KYM лежить на BC .

5. Знайдіть усі натуральні числа $n \geq 2$ такі, що рівність

$$i + j \equiv C_n^i + C_n^j \pmod{2}$$

справджується для довільних $0 \leq i \leq j \leq n$.

6. Нехай $n \geq 3$ - непарне натуральне число. Кожну клітинку дошки розміром $n \times n$ пофарбовано в жовтий або блакитний колір. Назвемо послідовність клітин S_1, S_2, \dots, S_m шляхом, якщо всі вони одного кольору і клітинки S_i та S_j мають спільне ребро тоді і лише тоді коли $|i - j| = 1$. Припустимо, що всі клітинки жовтого кольору утворюють шлях і всі клітинки блакитного кольору утворюють шлях. Доведіть, що один з двох шляхів починається або закінчується в центрі дошки.